Diplomarbeit

Superdiffusivität des asymmetrischen Exklusionsprozesses in Dimension zwei

Angefertigt am Institut für Angewandte Mathematik

Vorgelegt der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

von

Robert Philipowski

aus Alfter

März 2004

Einführung

Der asymmetrische Exklusionsprozeß ist ein zeitstetiger Markov-Prozeß auf $\{0,1\}^{\mathbf{Z}^d}$, der aus miteinander wechselwirkenden Irrfahrten auf dem Gitter $\mathbf{Z}^d$ besteht. Zu jedem Zeitpunkt $t \geq 0$ darf sich an jedem Gitterpunkt $x \in \mathbf{Z}^d$ höchstens ein Teilchen befinden; daher der Name Exklusionsprozeß. Es sei $\eta_t(x) := 1$, falls sich zum Zeitpunkt t ein Teilchen in x befindet, und $\eta_t(x) := 0$, falls x unbesetzt ist. Die stochastische Dynamik läßt sich anschaulich wie folgt beschreiben:
Ein Teilchen im Punkt $x \in \mathbf{Z}^d$ führt unabhängig von der Vergangenheit und den anderen Teilchen folgende Schritte aus:

1. Das Teilchen wartet eine exponentielle Zeit.

2. Es wählt einen Punkt $y \in \mathbf{Z}^d$ gemäß einer translationsinvarianten Übergangswahrscheinlichkeitsverteilung $p(x,y) = p(y-x)$ aus. (Wir folgen dabei der üblichen Normierungskonvention, indem wir $\sum_{z\in\mathbf{Z}^d} p(z) = d$ an Stelle von $\sum_{z\in\mathbf{Z}^d} p(z) = 1$ voraussetzen.)

3. Falls der Punkt y unbesetzt ist, springt das Teilchen dorthin; andernfalls bleibt es in x.

Sodann startet der Prozeß von Neuem.

Von besonderem Interesse ist das Studium des hydrodynamischen Limes. Gegeben sei hierzu eine zweimal stetig differenzierbare Funktion
$\rho_0 : \mathbf{R}^d \to [0,1]$. Für jede natürliche Zahl $N \geq 1$ ordnen wir ihr das folgende Wahrscheinlichkeitsmaß μ^N auf $\{0,1\}^{\mathbf{Z}^d}$ zu: Bezüglich μ^N sind die Funktionen $\eta \mapsto \eta(x)$ unabhängig und Bernoulli-verteilt mit Erwartungswert $\rho_0(x/N)$. Man bezeichnet die Folge $(\mu^N)_{N\geq 1}$ als die Folge der dem Profil $\rho_0 : \mathbf{R}^d \to [0,1]$ zugeordneten Bernoulli-Produktmaße mit sich langsam änderndem Parameter.
Es bezeichne $(\eta_t^N)_{t\geq 0}$ den um den Faktor N beschleunigten asymmetrischen Exklusionsprozeß. Die Zeit wird also um den Faktor N skaliert; man spricht von Euler-Skalierung.

Rezakhanlou [7] hat gezeigt, daß in einem schwachen Sinne

$$\rho_t(u) := \lim_{N\to\infty} E^{\mu^N} \left[\eta_t^N(\lfloor uN \rfloor)\right]$$

existiert und der nicht viskosen Burgers-Gleichung

$$\partial_t \rho + \gamma \cdot \nabla \left[\rho(1-\rho)\right] = 0$$

mit den gegebenen Anfangswerten ρ_0 genügt; hierbei bezeichne
$\gamma := \sum_{z\in\mathbf{Z}^d} zp(z)$ die Richtung der Drift.

Dieses Ergebnis läßt sich wie folgt deuten: Wir betrachten ein System von Teilchen (z.B. eine Flüssigkeit oder ein Gas) in $\mathbf{R}^d$. Wir nehmen an, daß die Teilchendynamik auf mikroskopischer Ebene durch den asymmetrischen Exklusionsprozeß gesteuert wird und daß zum Zeitpunkt $t = 0$ die Teilchendichte im Punkt $u \in \mathbf{R}^d$ durch $\rho_0(u)$ gegeben ist, also die Teilchenzahl in einer kleinen Umgebung um u proportional zu $\rho_0(u)$ und dem Volumen der Umgebung ist.
Das Ergebnis von Rezakhanlou besagt dann, daß die zeitliche Entwicklung der Teilchendichte in der Euler-Skalierung durch die obige partielle Differentialgleichung beschrieben wird.

In Dimension $d \geq 3$ gelang es Landim, Olla und Yau [4], dieses Ergebnis zu verfeinern: Sie konnten, ebenfalls in der Euler-Skalierung, zeigen, daß die Korrektur bis zur nächsten Ordnung durch die viskose Burgers-Gleichung

$$\partial_t\rho + \gamma\cdot\nabla\left[\rho(1-\rho)\right] = \frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{d}\partial_i\left[a^{i,j}(\rho)\partial_j(\rho)\right]$$

gegeben ist; die in dieser Gleichung auftretende Matrix $(a^{i,j}(\rho))_{i,j=1}^d$ ist der Diffusionskoeffizient.

Dieselben Autoren haben in ihrem Aufsatz [3] verschiedene Eigenschaften des Diffusionskoeffizienten untersucht; insbesondere haben sie ihn in der Form

$$a^{i,j}(\rho) = \lim_{t\to\infty} D_{ij}(t,\rho)$$

mit

$$D_{ij}(t,\rho) := \frac{1}{2t\chi}\left\{\sum_{x\in\mathbf{Z}^d} x_i x_j E^\rho\left[\{\eta_t(x)-\eta_0(x)\}\eta_0(0)\right] - \chi v_i v_j t^2\right\} \qquad (1)$$

dargestellt.

Wir bezeichnen $D(t) = D(t,\rho)$ als *Diffusionskoeffizienten zum Zeitpunkt t*. Der Darstellung (1) ist das Verhalten von $D(t)$ für $t\to\infty$ nicht sofort anzusehen. In Dimension $d \geq 3$ haben Landim und Yau [6] gezeigt, daß $D(t)$ für $t\to\infty$ beschränkt bleibt.

In Dimension 2 ist die Situation völlig anders: Wir werden unter einer speziellen Voraussetzung an die Übergangswahrscheinlichkeiten und die Startverteilung zeigen, daß $D_{11}(t)$ für $t \to \infty$ im zeitlichen Mittel mindestens so schnell wächst wie $(\log t)^{1/2}$. Dabei folgen wir den Ideen von Landim, Quastel, Salmhofer und Yau in ihrem Aufsatz [5].

Der Schlüssel zum Beweis liegt darin, die Resolvente $(\lambda - \mathcal{L})^{-1}$ des Generators $\mathcal{L}$ des Exklusionsprozesses abzuschätzen. Hierzu stellen wir in Kapitel 2 die Resolventengleichung $(\lambda - \mathcal{L})u = w$ als unendliches lineares Gleichungssystem dar. Das bei Grad n abgeschnittene Gleichungssystem entspricht der Gleichung $(\lambda - \mathcal{L}_n)u = w$ für einen Operator $\mathcal{L}_n$. Wir zeigen, daß sich $\mathcal{L}$ durch $\mathcal{L}_n$ abschätzen läßt und verwenden in Kapitel 3 die Abschätzung bei Grad 3.
Die zentrale Idee besteht nun darin, die Situation durch Anwendung der Fourier-Transformation zu vereinfachen. Hierzu eignet sich der Operator $\mathcal{L}_3$ selbst allerdings nicht. Wir ersetzen ihn daher durch einen ähnlichen Operator L_3, wonach die Abschätzung mit Hilfe der Fourier-Transformation gelingt. Im letzten Kapitel rechtfertigen wir schließlich die Ersetzung von $\mathcal{L}_3$ durch L_3.

Dank

Ich danke Herrn Prof. Dr. Karl-Theodor Sturm dafür, daß er mir dieses interessante Thema gestellt hat und mich bei meiner Arbeit betreut und beraten hat.
Meinen Eltern danke ich dafür, daß sie mir mein Studium ermöglicht haben und mir immer zur Seite stehen.

Inhaltsverzeichnis

1 Der Diffusionskoeffizient des asymmetrischen Exklusionsprozesses. Definitionen und Formulierung des Hauptresultats

Wir betrachten den asymmetrischen einfachen Exklusionsprozeß auf $\mathbf{Z}^d$. Dies ist ein zeitstetiger Markov-Prozeß $(\eta_t)_{t\geq 0}$ mit Zustandsraum $\{0,1\}^{\mathbf{Z}^d}$, dessen Generator $\mathcal{L}$ auf Zylinderfunktionen (das sind Funktionen, die nur von endlich vielen Variablen abhängen) $f : \{0,1\}^{\mathbf{Z}^d} \to \mathbf{R}$ wie folgt wirkt:

$$(\mathcal{L}f)(\eta) := \sum_{x,y\in\mathbf{Z}^d} p(y-x)\eta(x)[1-\eta(y)][f(\eta^{x,y}) - f(\eta)]$$

Dabei bezeichne $\eta^{x,y}$ diejenige Konfiguration, die aus η durch Vertauschen der Belegungsvariablen von x und y entsteht:

$$\eta^{x,y}(z) := \begin{cases} \eta(y) & \text{, falls } z = x \\ \eta(x) & \text{, falls } z = y \\ \eta(z) & \text{, falls } z \notin \{x,y\} \end{cases}$$

Ferner ist $p : \mathbf{Z}^d \to [0,1]$ eine Funktion mit

1. $p(e_i) + p(-e_i) = 1$, $i = 1, \ldots, d$
2. $p(z) = 0$, falls $z \notin \{e_i, -e_i \mid i = 1, \ldots, d\}$.

(Die e_i sind die kanonischen Einheitsvektoren in $\mathbf{Z}^d$.)
Der Generator hat also die Form

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}f)(\eta) \quad = \quad & \sum_{x\in\mathbf{Z}^d}\sum_{i=1}^{d} \big\{p(e_i)\eta(x)[1-\eta(x+e_i)][f(\eta^{x,x+e_i}) - f(\eta)] \\ & + p(-e_i)\eta(x)[1-\eta(x-e_i)][f(\eta^{x,x-e_i}) - f(\eta)]\big\} .\end{aligned}$$

Die Halbgruppe des Prozesses bezeichnen wir mit $(e^{t\mathcal{L}})_{t\geq 0}$.

Für $x \in \mathbf{Z}^d$, $\eta \in \{0,1\}^{\mathbf{Z}^d}$ und $f : \{0,1\}^{\mathbf{Z}^d} \to \mathbf{R}$ seien

$$(\tau_x\eta)(y) := \eta(x+y)$$

und

$$(\tau_x f)(\eta) := f(\tau_x\eta).$$

Für $\rho \in [0,1]$ sei ν_ρ das Bernoulli-Produktmaß auf $\{0,1\}^{\mathbf{Z}^d}$ mit Dichte ρ. Unter diesem Wahrscheinlichkeitsmaß sind die Funktionen $\eta \mapsto \eta(x)$ unabhängig und Bernoulli-verteilt mit Erwartungswert ρ. Diese Maße sind invariant für den einfachen Exklusionsprozeß, siehe z. B. [2], Proposition 2.2.

Für $f \in L^1(\nu_\rho)$ sei

$$< f >_\rho := E^{\nu_\rho}(f)$$

der Erwartungswert von f bezüglich ν_ρ.

Für $f, g \in L^2(\nu_\rho)$ seien

$$< f, g >_\rho := < fg >_\rho \tag{2}$$

das Skalarprodukt und

$$< f; g >_\rho := < fg >_\rho - < f >_\rho < g >_\rho$$

die Kovarianz von f und g bezüglich ν_ρ.

Für eine Konfiguration $\eta \in \{0,1\}^{\mathbf{Z^d}}$ bzw. eine Dichte $\rho \in [0,1]$ bezeichne P^η bzw. P^ρ dasjenige W-Maß auf dem Pfadraum

$$D(\mathbf{R}_+, \{0,1\}^{\mathbf{Z}^d}) := \{f : \mathbf{R}_+ \to \{0,1\}^{\mathbf{Z}^d} \mid f \text{ rechtsstetig mit linken Limiten}\},$$

das dem in η bzw. mit Verteilung ν_ρ startenden Markov-Prozeß mit Generator $\mathcal{L}$ entspricht.

Erwartungswerte bezüglich P^η bzw. P^ρ bezeichnen wir mit E^η bzw. E^ρ.

Für $x \in \mathbf{Z}^d$, $i \in \{1, \dots, d\}$ und eine Konfiguration $\eta \in \{0,1\}^{\mathbf{Z}^d}$ ist der *augenblickliche Fluß* $W_{x,x+e_i} = W_{x,x+e_i}(\eta)$ von x nach $x + e_i$ definiert als die Differenz zwischen der Rate, mit der ein Teilchen von x nach $x + e_i$ springt, und der Rate, mit der ein Teilchen von $x + e_i$ nach x springt:

$$W_{x,x+e_i}(\eta) := p(e_i)\eta(x)[1 - \eta(x + e_i)] - p(-e_i)\eta(x + e_i)[1 - \eta(x)]$$

Für $i \in \{1, \dots, d\}$ und eine Konfiguration $\eta \in \{0,1\}^{\mathbf{Z^d}}$ sei $w_i = w_i(\eta)$ der *normalisierte Fluß* in der i-ten Richtung:

$$w_i(\eta) := W_{0,e_i}(\eta) - < W_{0,e_i} >_\rho - \frac{d}{d\theta} < W_{0,e_i} >_\theta \Big|_{\theta=\rho} [\eta(0) - \rho]$$

Der *adjungierte Prozeß* ist dadurch charakterisiert, daß sein Generator $\mathcal{L}^*$ bezüglich ν_ρ zu $\mathcal{L}$ adjungiert ist. $\mathcal{L}^*$ ist explizit gegeben durch

$$(\mathcal{L}^* f)(\eta) := \sum_{x,y \in \mathbf{Z}^d} \check{p}(y - x)\eta(x)[1 - \eta(y)][f(\eta^{x,y}) - f(\eta)],$$

wobei $\check{p}(z) := p(-z)$. (Siehe z. B. [2], Proposition 2.2.)

Seine Halbgruppe bezeichnen wir mit $(e^{t\mathcal{L}^*})_{t\geq 0}$.

Wie für den ursprünglichen Prozeß definieren wir auch für den adjungierten Prozeß die Flüsse $W^*_{x,x+e_i} = W^*_{x,x+e_i}(\eta)$ und $w_i = w^*_i(\eta)$:

$$\begin{aligned} W^*_{x,x+e_i}(\eta) &:= \check{p}(e_i)\eta(x)[1-\eta(x+e_i)] - \check{p}(-e_i)\eta(x+e_i)[1-\eta(x)] \\ w^*_i(\eta) &:= W^*_{0,e_i}(\eta) - < W^*_{0,e_i} >_\rho - \frac{d}{d\theta} < W^*_{0,e_i} >_\theta \Big|_{\theta=\rho} [\eta(0)-\rho] \end{aligned}$$

Sei $\chi = \chi(\rho)$ die Kompressibilität, definiert durch

$$\chi(\rho) := \sum_{x\in\mathbf{Z}^d} < \eta(x); \eta(0) >_\rho .$$

In unserer Situation gilt wegen der Unabhängigkeit der $\eta(x)$ bezüglich ν_ρ:

$$\begin{aligned} \chi(\rho) &= < \eta(0); \eta(0) >_\rho \\ &= < \eta(0) >_\rho - < \eta(0) >^2_\rho \\ &= \rho - \rho^2 \\ &= \rho(1-\rho) \end{aligned}$$

Sei

$$S_\rho(x,t) := E^\rho \left[\{\eta_t(x) - \eta_0(x)\}\eta_0(0)\right]$$

die *zeitabhängige Korrelationsfunktion im Gleichgewicht mit Dichte* ρ.

Für $t > 0$ ist die *Geschwindigkeit* $v = (v_1, \ldots, v_d) \in \mathbf{R}^d$ definiert durch

$$v := \frac{1}{t\chi} \sum_{x\in\mathbf{Z}^d} x S_\rho(x,t).$$

Es gilt (siehe [8], Kapitel II.5.1, Formel (5.7)):

$$v = (1-2\rho) \sum_{z\in\mathbf{Z}^d} p(z) z$$

Die Geschwindigkeit ist also insbesondere zeitunabhängig.

Der *Diffusionskoeffizient* $(D_{ij}(t))_{i,j=1}^d = (D_{ij}(\rho,t))_{i,j=1}^d \in \mathbf{R}^{d\times d}$ zum Zeitpunkt $t \in \mathbf{R}_+$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} D_{ij}(t) \;&:=\; \frac{1}{2t\chi}\left\{\sum_{x\in\mathbf{Z}^d} x_i x_j S_\rho(x,t) - \chi v_i v_j t^2\right\} \\ &=\; \frac{1}{2t\chi}\left\{\sum_{x\in\mathbf{Z}^d} x_i x_j E^\rho\left[\{\eta_t(x)-\eta_0(x)\}\eta_0(0)\right] - \chi v_i v_j t^2\right\}. \end{aligned}$$

Satz 1 *Der Diffusionskoeffizient läßt sich auch durch die symmetrisierte Green-Kubo-Formel ausdrücken, d.h. es gilt:*

$$D_{ij}(t) = \frac{1}{2}\,\delta_{ij} - \frac{1}{2t\chi}\int_0^t\int_0^s \sum_{x\in\mathbf{Z}^d}\left\{< w_i; e^{r\mathcal{L}^*}\tau_x w_j^* >_\rho + < w_j; e^{r\mathcal{L}^*}\tau_x w_i^* >_\rho\right\} dr\, ds$$

Beweis : Die Behauptung folgt unmittelbar aus den folgenden drei Lemmata:

Lemma 1.1

$$\begin{aligned} &\sum_{x\in\mathbf{Z}^d} x_i x_j E^\rho[\{\eta_t(x)-\eta_0(x)\}\eta_0(0)] \\ =\;& -\delta_{ij} t < [\eta(e_i)-\eta(0)] W_{0,e_i} >_\rho \\ &- \int_0^t\int_0^s \sum_{x\in\mathbf{Z}^d}\left\{< W_{0,e_i}; e^{r\mathcal{L}^*}\tau_x W_{0,e_j}^* >_\rho + < W_{0,e_j}; e^{r\mathcal{L}^*}\tau_x W_{0,e_i}^* >_\rho\right\} dr\, ds \end{aligned}$$

Lemma 1.2

$$< [\eta(e_i)-\eta(0)] W_{0,e_i} >_\rho = -\chi$$

Lemma 1.3

$$\begin{aligned} &\int_0^t\int_0^s \sum_{x\in\mathbf{Z}^d} < W_{0,e_i}; e^{r\mathcal{L}^*}\tau_x W_{0,e_j}^* >_\rho dr\, ds \\ =\;& \int_0^t\int_0^s \sum_{x\in\mathbf{Z}^d} < w_i; e^{r\mathcal{L}^*}\tau_x w_j^* >_\rho dr\, ds - \frac{\chi}{2} v_i v_j t^2 \end{aligned}$$

Für einen Beweis dieser Lemmata siehe [3], Lemma 2.1 und die sich anschließenden Untersuchungen.

Ab jetzt betrachten wir nur noch den folgenden Spezialfall:

$d = 2\ ,\ p(e_1) = 1\ ,\ p(-e_1) = 0\ ,\ p(e_2) = p(-e_2) = \frac{1}{2}$

Der Prozeß ist also in x_1-Richtung total asymmetrisch (Teilchen können nur nach rechts springen) und in x_2-Richtung symmetrisch.

Der Generator $\mathcal{L}$ lautet somit:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}f(\eta) \quad := \quad & \sum_{x\in\mathbf{Z}^2} \{\, \eta(x)[1-\eta(x+e_1)][f(\eta^{x,x+e_1}) - f(\eta)] \\
& + \frac{1}{2}\eta(x)[1-\eta(x+e_2)][f(\eta^{x,x+e_2}) - f(\eta)] \\
& + \frac{1}{2}\eta(x)[1-\eta(x-e_2)][f(\eta^{x,x-e_2}) - f(\eta)]\, \} \\
= \quad & \sum_{x\in\mathbf{Z}^2} \{\eta(x)[1-\eta(x+e_1)][f(\eta^{x,x+e_1}) - f(\eta)] \\
& + \frac{1}{2} \underbrace{\{\eta(x)[1-\eta(x+e_2)] + \eta(x+e_2)[1-\eta(x)]\}}_{=1\ ,\ \text{falls}\ \eta(x)\neq\eta(x+e_2)} [f(\eta^{x,x+e_2}) - f(\eta)]\} \\
= \quad & \sum_{x\in\mathbf{Z}^2} \left\{ \eta(x)[1-\eta(x+e_1)][f(\eta^{x,x+e_1}) - f(\eta)] + \frac{1}{2}[f(\eta^{x,x+e_2}) - f(\eta)] \right\}
\end{aligned}
$$

Für die Flüsse erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
W_{x,x+e_1}(\eta) &= \eta(x)[1-\eta(x+e_1)] \\
W_{x,x+e_2}(\eta) &= \frac{1}{2}\eta(x)[1-\eta(x+e_2)] - \frac{1}{2}\eta(x+e_2)[1-\eta(x)] \\
&= \frac{1}{2}[\eta(x) - \eta(x+e_2)] \\
W^*_{x,x+e_1}(\eta) &= -W_{x,x+e_1}(\eta) \\
W^*_{x,x+e_2}(\eta) &= W_{x,x+e_2}(\eta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow w_1(\eta) = -w_1^*(\eta) &= W_{0,e_1}(\eta) - < W_{0,e_1} >_\rho - \frac{d}{d\theta} < W_{0,e_1} >_\theta \Big|_{\theta=\rho} [\eta(0) - \rho] \\
&= \eta(0)[1-\eta(e_1)] - \rho(1-\rho) - (1-2\rho)[\eta(0)-\rho] \\
&= \eta(0) - \eta(0)\eta(e_1) - \rho + \rho^2 - \eta(0) + \rho + 2\rho\eta(0) - 2\rho^2 \\
&= -\eta(0)\eta(e_1) - \rho^2 + 2\rho\eta(0) \\
&= -\eta(0)\eta(e_1) + \eta(0)\rho + \rho\eta(e_1) - \rho^2 + \rho\eta(0) - \rho\eta(e_1) \\
&= -[\eta(0)-\rho][\eta(e_1)-\rho] - \rho[\eta(e_1) - \eta(0)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_2(\eta) = w_2^*(\eta) &= W_{0,e_2}(\eta) - < W_{0,e_2} >_\rho - \frac{d}{d\theta} < W_{0,e_2} >_\theta \Big|_{\theta=\rho} [\eta(0) - \rho] \\
&= \frac{1}{2}[\eta(0) - \eta(e_2)]
\end{aligned}
$$

Für Zylinderfunktionen $g, h : \{0,1\}^{\mathbf{Z}^2} \to \mathbf{R}$ definieren wir das folgende Semiskalarprodukt (d.h. positiv semidefinite symmetrische Bilinearform):

$$\ll g, h \gg_\rho := \sum_{x \in \mathbf{Z}^2} < \tau_x g; h >_\rho = \sum_{x \in \mathbf{Z}^2} < \tau_x h; g >_\rho$$

Bemerkung :

1. Obige Summe ist in Wahrheit endlich, denn g und h sind Zylinderfunktionen, und ν_ρ ist ein Produktmaß.

2. Bilinearität und Symmetrie sind klar. Wir werden später sehen, daß $\ll \cdot, \cdot \gg_\rho$ tatsächlich positiv semidefinit ist.

3. Das Semiskalarprodukt $\ll \cdot, \cdot \gg_\rho$ induziert die Seminorm
$$\|f\|_\rho := \sqrt{\ll f, f \gg_\rho}\ .$$

4. *Gradiententerme* der Form $\tau_y h - h$ leisten zu diesem Semiskalarprodukt keinen Beitrag:
$$\ll \tau_y h - h, f \gg_\rho = \sum_{x \in \mathbf{Z}^2} [< \tau_{x+y} h; f >_\rho - < \tau_x h; f >_\rho] = 0$$

5. Da die normalisierten Flüsse w_1, w_2, w_1^* und w_2^* von nun an nur noch in diesem Semiskalarprodukt auftauchen werden, dürfen wir ihre Gradientenanteile fortlassen, und auch das Vorzeichen spielt keine Rolle. Wir setzen daher ab jetzt:
$$
\begin{aligned}
w_1(\eta) &= -w_1^*(\eta) &&= [\eta(0) - \rho][\eta(e_1) - \rho] \\
w_2(\eta) &= w_2^*(\eta) &&= 0
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Wir kommen nun zum zentralen Ergebnis dieser Arbeit:

Theorem 1 *Für $\rho = 1/2$ gilt:*

1. $\forall t > 0 : D_{12}(t) = D_{21}(t) = 0\ ,\ D_{22}(t) = \frac{1}{2}$

2. Es gibt ein $C > 0$, so daß für alle genügend kleinen $\lambda > 0$ gilt:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} t D_{11}(t) dt \geq \frac{C}{\lambda^2} |\log \lambda|^{1/2}$$

Bemerkung : Der zweite Teil des Theorems besagt, daß in einem gewissen mittleren, asymptotischen Sinne $D_{11}(t)$ mindestens so schnell wie $(\log t)^{1/2}$ wächst.

Beweis : Wegen $w_2 = w_2^* = 0$ folgt die erste Aussage unmittelbar aus Satz 1. Wegen $w_1^* = -w_1$ liefert Satz 1 ferner:

$$D_{11}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{t\chi} \int_0^t \int_0^s \ll e^{u\mathcal{L}} w_1, w_1 \gg_\rho du\, ds$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\lambda t} t D_{11}(t) dt &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} t \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{t\chi} \int_0^t \int_0^s \ll e^{u\mathcal{L}} w_1, w_1 \gg_\rho du\, ds \right] dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty t e^{-\lambda t} dt + \frac{1}{\chi} \int_0^\infty \int_u^\infty \int_u^t e^{-\lambda t} \ll e^{u\mathcal{L}} w_1, w_1 \gg_\rho ds\, dt\, du \\
&= \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{\chi} \int_0^\infty \ll e^{u\mathcal{L}} w_1, w_1 \gg_\rho \left[\int_u^\infty e^{-\lambda t} (t-u) dt \right] du \\
&= \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{\chi} \int_0^\infty \ll e^{-\lambda u} e^{u\mathcal{L}} w_1, w_1 \gg_\rho \left[\int_u^\infty e^{-\lambda(t-u)} (t-u) dt \right] du \\
&= \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{\chi} \int_0^\infty \ll e^{-\lambda u} e^{u\mathcal{L}} w_1, w_1 \gg_\rho \left[\int_0^\infty t e^{-\lambda t} dt \right] du \\
&= \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{\chi\lambda^2} \ll \int_0^\infty e^{-\lambda u} e^{u\mathcal{L}} w_1 du, w_1 \gg_\rho \\
&= \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{\chi\lambda^2} \ll (\lambda - \mathcal{L})^{-1} w_1, w_1 \gg
\end{aligned}$$

Dabei ist die letzte Gleichung die Resolventenformel aus der Theorie der Kontraktionshalbgruppen, siehe z. B. [1], Kapitel I, Theorem 1.1.
Theorem 1 folgt daher aus der folgenden Abschätzung für die Resolvente:

Satz 2 *Es gibt ein $C > 0$, so daß für alle genügend kleinen $\lambda > 0$ gilt:*

$$\ll w_1, (\lambda - \mathcal{L})^{-1} w_1 \gg \geq C |\log \lambda|^{1/2}$$

Im Rest der Arbeit wird es ausschließlich darum gehen, Satz 2 zu beweisen. Da w_1 der einzige uns interessierende Fluß ist, schreiben wir ab jetzt kurz w für w_1.

2 Die Resolventenhierarchie

Es bezeichne $\mathcal{S} := \frac{\mathcal{L}+\mathcal{L}^*}{2}$ den symmetrischen und $\mathcal{A} := \frac{\mathcal{L}-\mathcal{L}^*}{2}$ den asymmetrischen Anteil des Generators $\mathcal{L}$.
$\mathcal{L}^*$, $\mathcal{S}$ und $\mathcal{A}$ wirken wie folgt auf Zylinderfunktionen $f : \{0,1\}^{\mathbf{Z}^2} \to \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}^* f)(\eta) &= \sum_{x\in\mathbf{Z}^2} \{\, \eta(x)[1-\eta(x-e_1)][f(\eta^{x,x-e_1}) - f(\eta)] \\
&\qquad + \frac{1}{2}\eta(x)[1-\eta(x+e_2)][f(\eta^{x,x+e_2}) - f(\eta)] \\
&\qquad + \frac{1}{2}\eta(x)[1-\eta(x-e_2)][f(\eta^{x,x-e_2}) - f(\eta)] \,\} \\
&= \sum_{x\in\mathbf{Z}^2} \left\{ \eta(x)[1-\eta(x-e_1)][f(\eta^{x,x-e_1}) - f(\eta)] + \frac{1}{2}[f(\eta^{x,x+e_2}) - f(\eta)] \right\} \\
&= \sum_{x\in\mathbf{Z}^2} \left\{ \eta(x+e_1)[1-\eta(x)][f(\eta^{x,x+e_1}) - f(\eta)] + \frac{1}{2}[f(\eta^{x,x+e_2}) - f(\eta)] \right\} \\
(\mathcal{S} f)(\eta) &= \left(\frac{\mathcal{L}+\mathcal{L}^*}{2} f \right)(\eta) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbf{Z}^2} \{\, \underbrace{\{\eta(x)[1-\eta(x+e_1)] + \eta(x+e_1)[1-\eta(x)]\}}_{=1\ ,\ \text{falls } \eta(x)\neq\eta(x+e_1)} [f(\eta^{x,x+e_1}) - f(\eta)] \\
&\qquad + f(\eta^{x,x+e_2}) - f(\eta) \,\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{x\in\mathbf{Z}^2} \{ f(\eta^{x,x+e_i}) - f(\eta) \} \\
(\mathcal{A} f)(\eta) &= \left(\frac{\mathcal{L}-\mathcal{L}^*}{2} f \right)(\eta) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbf{Z}^2} \{\eta(x)[1-\eta(x+e_1)] - \eta(x+e_1)[1-\eta(x)]\}[f(\eta^{x,x+e_1}) - f(\eta)] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbf{Z}^2} [\eta(x) - \eta(x+e_1)][f(\eta^{x,x+e_1}) - f(\eta)]
\end{aligned}$$

Für $n \in \mathbf{N}$ sei $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n(\mathbf{Z}^2)$ die Menge aller n-elementigen Teilmengen von $\mathbf{Z}^2$. Wir bezeichnen zwei Mengen $\Lambda, \tilde{\Lambda} \in \mathcal{P}_n$ als *äquivalent*, falls es ein $x \in \mathbf{Z}^2$ mit $\tilde{\Lambda} = \Lambda + x$ gibt. In diesem Fall schreiben wir $\Lambda \sim \tilde{\Lambda}$. Die Menge der Äquivalenzklassen von $\mathcal{P}_n$ bezüglich dieser Äquivalenzrelation bezeichnen wir mit $\tilde{\mathcal{P}}_n$.

Es bezeichne $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\rho)$ den Vektorraum der Zylinderfunktionen $f : \{0,1\}^{\mathbf{Z}^2} \to \mathbf{R}$ mit $< f >_\rho = 0$.

Für $x \in \mathbf{Z}^2$ sei $\xi_x \in \mathcal{C}(\rho)$ definiert durch

$$\xi_x(\eta) := \frac{\eta(x) - \rho}{\sqrt{\rho(1-\rho)}}.$$

Für eine endliche Teilmenge Λ von $\mathbf{Z}^2$ sei die Zylinderfunktion $\xi_\Lambda : \{0,1\}^{\mathbf{Z}^2} \to \mathbf{R}$ gegeben durch

$$\xi_\Lambda(\eta) := \prod_{x \in \Lambda} \xi_x(\eta). \tag{4}$$

Wegen der Unabhängigkeit der Funktionen $\eta \mapsto \eta(x)$ unter ν_ρ gilt für $\Lambda \neq \emptyset$:

$$< \xi_\Lambda >_\rho = 0 \text{ , also } \xi_\Lambda \in \mathcal{C}(\rho).$$

Ferner beobachten wir, daß wegen (3) für den Fluß w gilt:

$$w = \rho(1-\rho)\xi_{\{0,e_1\}} \tag{5}$$

Lemma 2.1 *Die Funktionen ξ_Λ, wobei Λ alle endlichen Teilmengen von $\mathbf{Z}^2$ durchläuft, bilden ein Orthonormalsystem in $L^2(\nu_\rho)$.*

Beweis : Seien Λ und $\tilde{\Lambda}$ zwei endliche Teilmengen von $\mathbf{Z}^2$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow < \xi_\Lambda \xi_{\tilde{\Lambda}} >_\rho &= [\rho(1-\rho)]^{-1/2(|\Lambda|+|\tilde{\Lambda}|)} < \prod_{x \in \Lambda} [\eta(x) - \rho] \prod_{y \in \tilde{\Lambda}} [\eta(y) - \rho] >_\rho \\
&= [\rho(1-\rho)]^{-1/2(|\Lambda|+|\tilde{\Lambda}|)} \prod_{x \in \Lambda \cap \tilde{\Lambda}} \underbrace{< [\eta(x) - \rho]^2 >_\rho}_{= \rho(1-\rho)} \prod_{y \in \Lambda \triangle \tilde{\Lambda}} \underbrace{< [\eta(y) - \rho] >_\rho}_{= 0} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{, falls } \Lambda = \tilde{\Lambda} \\ 0 & \text{, falls } \Lambda \neq \tilde{\Lambda} \end{cases}
\end{aligned}$$

($\Lambda \triangle \tilde{\Lambda}$ ist die symmetrische Differenz von Λ und $\tilde{\Lambda}$.) □

Lemma 2.2 *Jede Zylinderfunktion $f : \{0,1\}^{\mathbf{Z}^2} \to \mathbf{R}$ ist eine endliche Linearkombination der Funktionen ξ_Λ.*

Beweis : Wir definieren für eine endliche Menge $\Lambda \subseteq \mathbf{Z}^2$, ein $\bar{\eta}' \in \{0,1\}^\Lambda$ und eine Konfiguration $\eta \in \{0,1\}^{\mathbf{Z}^2}$:

$$1_{\bar{\eta}',\Lambda}(\eta) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } \eta(x) = \bar{\eta}'(x) \ \forall x \in \Lambda \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt:

$$1_{\bar\eta',\Lambda}(\eta) = \prod_{\substack{x\in\Lambda\\ \bar\eta'(x)=1}} \eta(x) \prod_{\substack{x\in\Lambda\\ \bar\eta'(x)=0}} [1-\eta(x)]$$

Durch Ausmultiplizieren sehen wir daher, daß $1_{\bar\eta',\Lambda}$ eine Linearkombination der ξ_Λ ist.
Es sei nun eine Zylinderfunktion $f : \{0,1\}^{\mathbf{Z}^2} \to \mathbf{R}$ gegeben. f hänge nur von den Koordinaten x aus der endlichen Menge $\Lambda \subseteq \mathbf{Z}^2$ ab. Für jedes $\bar\eta' \in \{0,1\}^\Lambda$ sei ein $\eta' \in \{0,1\}^{\mathbf{Z}^2}$ mit $\eta'(x) = \bar\eta'(x) \forall x \in \Lambda$ gewählt. Dann gilt:

$$f = \sum_{\bar\eta'\in\{0,1\}^\Lambda} f(\eta') 1_{\bar\eta',\Lambda},$$

wobei $f(\eta')$ nach der Voraussetzung an f nicht von der Auswahl von η' abhängt. Also ist f eine Linearkombination der Funktionen $1_{\bar\eta',\Lambda}$ und damit auch der Funktionen ξ_Λ. □

Folgerung 2.1 *Die Funktionen ξ_Λ bilden eine Orthonormalbasis des Raumes $C(\{0,1\}^{\mathbf{Z}^2})$ der stetigen reellen Funktionen auf $\{0,1\}^{\mathbf{Z}^2}$.*

Beweis : Nach den beiden letzten Lemmata genügt es zu zeigen, daß die Menge der Zylinderfunktionen $f : \{0,1\}^{\mathbf{Z}^2} \to \mathbf{R}$ bezüglich der $L^2(\nu_\rho)$-Norm dicht in $C(\{0,1\}^{\mathbf{Z}^2})$ liegt:
Die Menge der Zylinderfunktionen bildet offenbar eine die Punkte trennende Unteralgebra von $C(\{0,1\}^{\mathbf{Z}^2})$. Da $\{0,1\}^{\mathbf{Z}^2}$ kompakt ist, liegt sie daher nach dem Approximationssatz von Stone-Weierstraß bezüglich der Supremumsnorm und damit auch bezüglich der $L^2(\nu_\rho)$-Norm dicht in $C(\{0,1\}^{\mathbf{Z}^2})$. □

Es bezeichne $\mathcal{M}_j = \mathcal{M}_j(\rho)$ den Vektorraum der Zylinderfunktionen vom *Grad* j, d.h.

$$\mathcal{M}_j(\rho) := \left\{ \sum_{\substack{\Lambda\subseteq\mathbf{Z}^2\\ |\Lambda|=j}} f_\Lambda \xi_\Lambda \mid f_\Lambda \in \mathbf{R} \text{ , fast alle } f_\Lambda = 0 \right\} \tag{6}$$

Wegen der Orthonormalität der Funktionen ξ_Λ ist die Darstellung einer Funktion $f \in \mathcal{M}_j$ als Linearkombination der ξ_Λ stets eindeutig, und die Räume $\mathcal{M}_j$ stehen bzgl. $< \cdot, \cdot >$ aufeinander senkrecht. Sei

$$\mathcal{C}_n = \mathcal{C}_n(\rho) := \bigoplus_{j=1}^n \mathcal{M}_j(\rho) \tag{7}$$

der Raum der Zylinderfunktionen f mit $< f >_\rho = 0$ vom Grad $\leq n$.

Jede Zylinderfunktion f mit $< f >_\rho = 0$ kann nach Lemma 2.1 und Lemma 2.2 auf eindeutige Weise als endliche Linearkombination von Zylinderfunktionen von endlichem Grad dargestellt werden:

$$\mathcal{C}(\rho) = \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{C}_n(\rho) = \bigoplus_{j\geq 1} \mathcal{M}_j(\rho) \tag{8}$$

Wir untersuchen jetzt genauer, wie das Semiskalarprodukt $\ll \cdot, \cdot \gg_\rho$ auf Zylinderfunktionen wirkt. Hierbei können wir uns auf Funktionen beschränken, deren Erwartungswert bezüglich ν_ρ 0 ist, da $\ll \cdot, \cdot \gg_\rho$ durch eine Summe von Kovarianzen definiert ist. Wir verwenden die aus den ξ_Λ bestehende Orthonormalbasis von $\mathcal{C}_n(\rho)$.
Seien also $g, h \in \mathcal{C}_n(\rho)$ dargestellt als

$$g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{\Lambda\subseteq \mathbf{Z}^2 \\ |\Lambda|=i}} g_\Lambda \xi_\Lambda, \quad h = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{\tilde{\Lambda}\subseteq \mathbf{Z}^2 \\ |\tilde{\Lambda}|=j}} h_{\tilde{\Lambda}} \xi_{\tilde{\Lambda}},$$

wobei die Summen in Wahrheit endlich sind.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \tau_x h &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{\tilde{\Lambda}\subseteq \mathbf{Z}^2 \\ |\tilde{\Lambda}|=j}} h_{\tilde{\Lambda}-x} \xi_{\tilde{\Lambda}} \\
\Rightarrow \ll g, h \gg_\rho &= \sum_{x\in\mathbf{Z}^2} < g; \tau_x h >_\rho \\
&= \sum_{x\in\mathbf{Z}^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{\Lambda\subseteq \mathbf{Z}^2 \\ |\Lambda|=i}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{\tilde{\Lambda}\subseteq \mathbf{Z}^2 \\ |\tilde{\Lambda}|=j}} g_\Lambda h_{\tilde{\Lambda}-x} \underbrace{< \xi_\Lambda \xi_{\tilde{\Lambda}} >_\rho}_{\substack{\neq 0 \text{ nur für} \\ \Lambda = \tilde{\Lambda}}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{\Lambda\subseteq \mathbf{Z}^2 \\ |\Lambda|=i}} \sum_{x\in\mathbf{Z}^2} g_\Lambda h_{\Lambda-x} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{\substack{\Lambda\subseteq \mathbf{Z}^2 \\ |\Lambda|=i}} \sum_{x\in\mathbf{Z}^2} g_\Lambda h_{\Lambda+x} \right]
\end{aligned}$$

In der inneren Doppelsumme taucht jeder Term der Form $g_\Lambda h_{\tilde{\Lambda}}$ mit $|\Lambda| = i, \Lambda \sim \tilde{\Lambda}$ genau einmal auf. Daher gilt:

$$\begin{aligned} \ll g, h \gg_\rho &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\Omega \in \tilde{\mathcal{P}}_i} \sum_{\Lambda, \tilde{\Lambda} \in \Omega} g_\Lambda h_{\tilde{\Lambda}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\Omega \in \tilde{\mathcal{P}}_i} \left(\sum_{\Lambda \in \Omega} g_\Lambda \right) \left(\sum_{\Lambda \in \Omega} h_\Lambda \right) \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\ll \cdot, \cdot \gg_\rho$ tatsächlich positiv semidefinit.
Ferner erkennen wir, daß die Räume $\mathcal{M}_j$ auch bezüglich $\ll \cdot, \cdot \gg$ aufeinander senkrecht stehen und daß eine Funktion $g = \sum_{y \in \mathbf{Z}^2} g_{\{y\}} \xi_{\{y\}} \in \mathcal{M}_1(\rho)$ genau dann zum Kern von $\ll \cdot, \cdot \gg_\rho$ gehört, wenn

$$\sum_{y \in \mathbf{Z}^2} g_{\{y\}} = 0 \tag{9}$$

gilt.

Sei $\mathcal{N}$ der Kern von $\ll \cdot, \cdot \gg_\rho$, und sei $\mathcal{C}^0 := \mathcal{C}/\mathcal{N}$.

Wir untersuchen nun genauer, wie $\mathcal{S}$ und $\mathcal{A}$ auf dem Raum $\mathcal{C}$ wirken:

Lemma 2.3

1. *Für jedes $n \in \mathbf{N}$ bildet $\mathcal{S}$ den Raum $\mathcal{M}_n$ in sich selbst ab.*

2. *$\mathcal{A}$ läßt sich in der Form*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_-$$

zerlegen, wobei $\mathcal{A}_0 : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$, $\mathcal{A}_+ : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_{n+1}$ und $\mathcal{A}_- : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_{n-1}$.

3. *Ist $f \in \mathcal{M}_n$ dargestellt als*

$$f = \sum_{\substack{\Lambda \subseteq \mathbf{Z}^2 \\ |\Lambda| = n}} f_\Lambda \xi_\Lambda,$$

so gilt:

$$(\mathcal{S}f)(\eta) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \sum_{x \in \mathbf{Z}^2} \sum_{\substack{\Omega \subseteq \mathbf{Z}^2 \\ |\Omega| = n-1 \\ \Omega \cap \{x, x+e_i\} = \emptyset}} [f_{\Omega \cup \{x+e_i\}} - f_{\Omega \cup \{x\}}][\xi_{\Omega \cup \{x+e_i\}}(\eta) - \xi_{\Omega \cup \{x\}}(\eta)]$$

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{A}_0 f)(\eta) &= \frac{1-2\rho}{2} \sum_{x\in\mathbf{Z}^2} \sum_{\substack{\Omega\subseteq\mathbf{Z}^2\\|\Omega|=n-1\\\Omega\cap\{x,x+e_1\}=\emptyset}} [f_{\Omega\cup\{x+e_1\}} - f_{\Omega\cup\{x\}}][\xi_{\Omega\cup\{x\}}(\eta) + \xi_{\Omega\cup\{x+e_1\}}(\eta)] \\
(\mathcal{A}_+ f)(\eta) &= -\sqrt{\rho(1-\rho)} \sum_{x\in\mathbf{Z}^2} \sum_{\substack{\Omega\subseteq\mathbf{Z}^2\\|\Omega|=n-1\\\Omega\cap\{x,x+e_1\}=\emptyset}} [f_{\Omega\cup\{x+e_1\}} - f_{\Omega\cup\{x\}}]\xi_{\Omega\cup\{x,x+e_1\}}(\eta) \\
(\mathcal{A}_- f)(\eta) &= \sqrt{\rho(1-\rho)} \sum_{x\in\mathbf{Z}^2} \sum_{\substack{\Omega\subseteq\mathbf{Z}^2\\|\Omega|=n-1\\\Omega\cap\{x,x+e_1\}=\emptyset}} [f_{\Omega\cup\{x+e_1\}} - f_{\Omega\cup\{x\}}]\xi_{\Omega}(\eta)
\end{aligned}
$$

Aus diesen expliziten Darstellungen folgen sofort die Behauptungen über das Abbildungsverhalten von $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_+$ und $\mathcal{A}_-$.

4. *$\mathcal{A}_-$ ist sowohl bezüglich $< \cdot,\cdot >_\rho$ als auch bezüglich $\ll \cdot,\cdot \gg_\rho$ zu $-\mathcal{A}_+$ adjungiert: $\mathcal{A}_- = -\mathcal{A}_+^*$*

Beweis : Wir untersuchen zunächst den Term $f(\eta^{x,x+e_i}) - f(\eta)$:

$$
\begin{aligned}
f(\eta^{x,x+e_i}) - f(\eta) &= \sum_{\substack{\Lambda\subseteq\mathbf{Z}^2\\|\Lambda|=n}} f_\Lambda\{\xi_\Lambda(\eta^{x,x+e_i}) - \xi_\Lambda(\eta)\} \\
&= [\rho(1-\rho)]^{-n/2} \sum_{\substack{\Lambda\subseteq\mathbf{Z}^2\\|\Lambda|=n}} f_\Lambda \left\{ \prod_{y\in\Lambda}[\eta^{x,x+e_i}(y)-\rho] - \prod_{y\in\Lambda}[\eta(y)-\rho] \right\}
\end{aligned}
$$

Der Term in der Klammer verschwindet, falls x und $x+e_i$ entweder beide zu Λ gehören oder beide nicht zu Λ gehören. Daher erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
&f(\eta^{x,x+e_i}) - f(\eta) \\
&= [\rho(1-\rho)]^{-n/2} \left[\sum_{\substack{\Lambda\subseteq\mathbf{Z}^2\\|\Lambda|=n\\x\in\Lambda\\x+e_i\notin\Lambda}} f_\Lambda \left\{ \prod_{y\in\Lambda}[\eta^{x,x+e_i}(y)-\rho] - \prod_{y\in\Lambda}[\eta(y)-\rho] \right\} \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{\substack{\Lambda\subseteq\mathbf{Z}^2\\|\Lambda|=n\\x\notin\Lambda\\x+e_i\in\Lambda}} f_\Lambda \left\{ \prod_{y\in\Lambda}[\eta^{x,x+e_i}(y)-\rho] - \prod_{y\in\Lambda}[\eta(y)-\rho] \right\} \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= [\rho(1-\rho)]^{-n/2} \Bigg[\sum_{\substack{\Omega\subseteq \mathbf{Z}^2\\ |\Omega|=n-1\\ \Omega\cap\{x,x+e_i\}=\emptyset}} f_{\Omega\cup\{x\}} \Bigg\{ \prod_{y\in\Omega\cup\{x+e_i\}} [\eta(y)-\rho] - \prod_{y\in\Omega\cup\{x\}} [\eta(y)-\rho] \Bigg\} \\
&\qquad + \sum_{\substack{\Omega\subseteq \mathbf{Z}^2\\ |\Omega|=n-1\\ \Omega\cap\{x,x+e_i\}=\emptyset}} f_{\Omega\cup\{x+e_i\}} \Bigg\{ \prod_{y\in\Omega\cup\{x\}} [\eta(y)-\rho] - \prod_{y\in\Omega\cup\{x+e_i\}} [\eta(y)-\rho] \Bigg\} \Bigg] \\
&= \sum_{\substack{\Omega\subseteq \mathbf{Z}^2\\ |\Omega|=n-1\\ \Omega\cap\{x,x+e_i\}=\emptyset}} \big[f_{\Omega\cup\{x\}} \{\xi_{\Omega\cup\{x+e_i\}}(\eta) - \xi_{\Omega\cup\{x\}}(\eta)\} - f_{\Omega\cup\{x+e_i\}} \{\xi_{\Omega\cup\{x+e_i\}}(\eta) - \xi_{\Omega\cup\{x\}}(\eta)\} \big] \\
&= - \sum_{\substack{\Omega\subseteq \mathbf{Z}^2\\ |\Omega|=n-1\\ \Omega\cap\{x,x+e_i\}=\emptyset}} [f_{\Omega\cup\{x+e_i\}} - f_{\Omega\cup\{x\}}][\xi_{\Omega\cup\{x+e_i\}}(\eta) - \xi_{\Omega\cup\{x\}}(\eta)]
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt:

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{S}f)(\eta) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \sum_{x\in\mathbf{Z}^2} \big\{ f(\eta^{x,x+e_i}) - f(\eta) \big\} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \sum_{x\in\mathbf{Z}^2} \sum_{\substack{\Omega\subseteq \mathbf{Z}^2\\ |\Omega|=n-1\\ \Omega\cap\{x,x+e_i\}=\emptyset}} [f_{\Omega\cup\{x+e_i\}} - f_{\Omega\cup\{x\}}][\xi_{\Omega\cup\{x+e_i\}}(\eta) - \xi_{\Omega\cup\{x\}}(\eta)]
\end{aligned}
$$

Insbesondere bildet also $\mathcal{S}$ den Raum $\mathcal{M}_n$ in sich selbst ab.

Wir leiten nun die Zerlegung $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_-$ des asymmetrischen Anteils $\mathcal{A}$ des Generators her. Wegen

$$
(\mathcal{A}f)(\eta) = \frac{1}{2} \sum_{x\in\mathbf{Z}^2} [\eta(x) - \eta(x+e_1)][f(\eta^{x,x+e_1}) - f(\eta)]
$$

betrachten wir zunächst den Term $[\eta(x)-\eta(x+e_1)][f(\eta^{x,x+e_1}) - f(\eta)]$, wobei wir den oben für $f(\eta^{x,x+e_1}) - f(\eta)$ berechneten Ausdruck verwenden:

$$[\eta(x) - \eta(x+e_1)][f(\eta^{x,x+e_1}) - f(\eta)]$$

$$= \sum_{\substack{\Omega\subseteq\mathbf{Z}^2 \\ |\Omega|=n-1 \\ \Omega\cap\{x,x+e_1\}=\emptyset}} [f_{\Omega\cup\{x+e_1\}} - f_{\Omega\cup\{x\}}][\eta(x+e_1) - \eta(x)][\xi_{\Omega\cup\{x+e_1\}}(\eta) - \xi_{\Omega\cup\{x\}}(\eta)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\rho(1-\rho)}} \sum_{\substack{\Omega\subseteq\mathbf{Z}^2 \\ |\Omega|=n-1 \\ \Omega\cap\{x,x+e_1\}=\emptyset}} [f_{\Omega\cup\{x+e_1\}} - f_{\Omega\cup\{x\}}][\eta(x+e_1) - \eta(x)]^2 \xi_\Omega(\eta)$$

Also gilt:

$$\mathcal{A}f(\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\rho(1-\rho)}} \sum_{x\in\mathbf{Z}^2} \sum_{\substack{\Omega\subseteq\mathbf{Z}^2 \\ |\Omega|=n-1 \\ \Omega\cap\{x,x+e_1\}=\emptyset}} [f_{\Omega\cup\{x+e_1\}} - f_{\Omega\cup\{x\}}]\ [\eta(x+e_1) - \eta(x)]^2\ \xi_\Omega(\eta) \tag{10}$$

Für den Faktor $[\eta(x+e_1) - \eta(x)]^2$ erhalten wir folgende Zerlegung:

$$\begin{aligned}
[\eta(x+e_1) - \eta(x)]^2 &= [\eta(x+e_1)]^2 - 2\eta(x)\eta(x+e_1) + [\eta(x)]^2 \\
&= \eta(x) + \eta(x+e_1) - 2\rho - 2\rho\eta(x) - 2\rho\eta(x+e_1) + 4\rho^2 \\
&\quad -2\eta(x)\eta(x+e_1) + 2\eta(x)\rho + 2\rho\eta(x+e_1) - 2\rho^2 \\
&\quad +2\rho - 2\rho^2 \\
&= (1-2\rho)[\eta(x) - \rho + \eta(x+e_1) - \rho] \\
&\quad -2[\eta(x) - \rho][\eta(x+e_1) - \rho] \\
&\quad +2\rho(1-\rho)
\end{aligned}$$

Diese Gleichung erlaubt uns die angekündigte Zerlegung $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_-$, indem wir in Formel (10) den Faktor $[\eta(x+e_1) - \eta(x)]^2$ durch obige drei Summanden ersetzen:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}_0 f)(\eta) &= \frac{1}{2\sqrt{\rho(1-\rho)}} \sum_{x\in\mathbf{Z}^2} \sum_{\substack{\Omega\subseteq\mathbf{Z}^2 \\ |\Omega|=n-1 \\ \Omega\cap\{x,x+e_1\}=\emptyset}} \\
&\quad [f_{\Omega\cup\{x+e_1\}} - f_{\Omega\cup\{x\}}](1-2\rho)[\eta(x) - \rho + \eta(x+e_1) - \rho]\xi_\Omega(\eta)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1-2\rho}{2} \sum_{x\in\mathbf{Z}^2} \sum_{\substack{\Omega\subseteq\mathbf{Z}^2\\ |\Omega|=n-1\\ \Omega\cap\{x,x+e_1\}=\emptyset}} [f_{\Omega\cup\{x+e_1\}} - f_{\Omega\cup\{x\}}][\xi_{\Omega\cup\{x\}}(\eta) + \xi_{\Omega\cup\{x+e_1\}}(\eta)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{A}_+ f)(\eta) &= -\frac{1}{\sqrt{\rho(1-\rho)}} \sum_{x\in\mathbf{Z}^2} \sum_{\substack{\Omega\subseteq\mathbf{Z}^2\\ |\Omega|=n-1\\ \Omega\cap\{x,x+e_1\}=\emptyset}} \\
&\quad [f_{\Omega\cup\{x+e_1\}} - f_{\Omega\cup\{x\}}][\eta(x)-\rho][\eta(x+e_1)-\rho]\xi_\Omega(\eta) \\
&= -\sqrt{\rho(1-\rho)} \sum_{x\in\mathbf{Z}^2} \sum_{\substack{\Omega\subseteq\mathbf{Z}^2\\ |\Omega|=n-1\\ \Omega\cap\{x,x+e_1\}=\emptyset}} [f_{\Omega\cup\{x+e_1\}} - f_{\Omega\cup\{x\}}]\xi_{\Omega\cup\{x,x+e_1\}}(\eta) \\
(\mathcal{A}_- f)(\eta) &= \sqrt{\rho(1-\rho)} \sum_{x\in\mathbf{Z}^2} \sum_{\substack{\Omega\subseteq\mathbf{Z}^2\\ |\Omega|=n-1\\ \Omega\cap\{x,x+e_1\}=\emptyset}} [f_{\Omega\cup\{x+e_1\}} - f_{\Omega\cup\{x\}}]\xi_\Omega(\eta)
\end{aligned}
$$

Es verbleibt der Beweis der vierten Behauptung. Wir zeigen zunächst, daß $\mathcal{A}_-$ bezüglich $< \cdot,\cdot >_\rho$ zu $-\mathcal{A}_+$ adjungiert ist. Seien hierzu $f \in \mathcal{M}_n$, $g \in \mathcal{M}_{n+1}$. Wir müssen zeigen, daß $< -\mathcal{A}_+ f, g >_\rho = < f, \mathcal{A}_- g >_\rho$. Hierzu verwenden wir die expliziten Darstellungen von $\mathcal{A}_+$ und $\mathcal{A}_-$ aus dem dritten Teil des Lemmas und die Tatsache, daß die Funktionen ξ_Ω bezüglich $< \cdot,\cdot >_\rho$ eine Orthonormalbasis des Raumes der Zylinderfunktionen bilden. Seien also

$$
f = \sum_{\substack{\Omega\subseteq\mathbf{Z}^2\\ |\Omega|=n}} f_\Omega \xi_\Omega, \quad g = \sum_{\substack{\Omega\subseteq\mathbf{Z}^2\\ |\Omega|=n+1}} g_\Omega \xi_\Omega
$$

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{A}_+ f &= \sqrt{\rho(1-\rho)} \sum_{x\in\mathbf{Z}^2} \sum_{\substack{\Omega\subseteq\mathbf{Z}^2\\ |\Omega|=n-1\\ \Omega\cap\{x,x+e_1\}=\emptyset}} [f_{\Omega\cup\{x+e_1\}} - f_{\Omega\cup\{x\}}]\xi_{\Omega\cup\{x,x+e_1\}} \\
&= \sqrt{\rho(1-\rho)} \sum_{x\in\mathbf{Z}^2} \sum_{\substack{\Omega\subseteq\mathbf{Z}^2\\ |\Omega|=n+1\\ x,x+e_1\in\Omega}} [f_{\Omega\setminus\{x\}} - f_{\Omega\setminus\{x+e_1\}}]\xi_\Omega \\
&= \sqrt{\rho(1-\rho)} \sum_{\substack{\Omega\subseteq\mathbf{Z}^2\\ |\Omega|=n+1}} \sum_{\substack{x\in\Omega\\ x+e_1\in\Omega}} [f_{\Omega\setminus\{x\}} - f_{\Omega\setminus\{x+e_1\}}]\xi_\Omega
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt mit der Orthonormalität der ξ_Ω:

$$\begin{aligned}
< -\mathcal{A}_+ f, g >_\rho &= \sqrt{\rho(1-\rho)} \sum_{\substack{\Omega \subseteq \mathbf{Z}^2 \\ |\Omega| = n+1}} \sum_{\substack{x \in \Omega \\ x+e_1 \in \Omega}} [f_{\Omega \setminus \{x\}} g_\Omega - f_{\Omega \setminus \{x+e_1\}} g_\Omega] \\
&= \sqrt{\rho(1-\rho)} \sum_{\substack{\Omega \subseteq \mathbf{Z}^2 \\ |\Omega| = n}} \left[\sum_{\substack{x \in \mathbf{Z}^2 \\ x \notin \Omega \\ x+e_1 \in \Omega}} f_\Omega g_{\Omega \cup \{x\}} - \sum_{\substack{x \in \Omega \\ x+e_1 \notin \Omega}} f_\Omega g_{\Omega \cup \{x+e_1\}} \right]
\end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_- g &= \sqrt{\rho(1-\rho)} \sum_{x \in \mathbf{Z}^2} \sum_{\substack{\Omega \subseteq \mathbf{Z}^2 \\ |\Omega| = n \\ \Omega \cap \{x, x+e_1\} = \emptyset}} [g_{\Omega \cup \{x+e_1\}} - g_{\Omega \cup \{x\}}] \xi_\Omega \\
&= \sqrt{\rho(1-\rho)} \sum_{\substack{\Omega \subseteq \mathbf{Z}^2 \\ |\Omega| = n}} \sum_{\substack{x \in \mathbf{Z}^2 \\ x, x+e_1 \notin \Omega}} [g_{\Omega \cup \{x+e_1\}} - g_{\Omega \cup \{x\}}] \xi_\Omega
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
&< f, \mathcal{A}_- g >_\rho \\
&= \sqrt{\rho(1-\rho)} \sum_{\substack{\Omega \subseteq \mathbf{Z}^2 \\ |\Omega| = n}} \sum_{\substack{x \in \mathbf{Z}^2 \\ x, x+e_1 \notin \Omega}} [f_\Omega g_{\Omega \cup \{x+e_1\}} - f_\Omega g_{\Omega \cup \{x\}}] \\
&= \sqrt{\rho(1-\rho)} \sum_{\substack{\Omega \subseteq \mathbf{Z}^2 \\ |\Omega| = n}} \left[\sum_{\substack{x \in \mathbf{Z}^2 \\ x+e_1 \notin \Omega}} f_\Omega g_{\Omega \cup \{x+e_1\}} - \sum_{\substack{x \in \mathbf{Z}^2 \\ x+e_1 \notin \Omega \\ x \in \Omega}} f_\Omega g_{\Omega \cup \{x+e_1\}} \right. \\
&\qquad \left. - \sum_{\substack{x \in \mathbf{Z}^2 \\ x \notin \Omega}} f_\Omega g_{\Omega \cup \{x\}} + \sum_{\substack{x \in \mathbf{Z}^2 \\ x \notin \Omega \\ x+e_1 \in \Omega}} f_\Omega g_{\Omega \cup \{x\}} \right]
\end{aligned}$$

Der erste und der dritte Term in der eckigen Klammer heben sich weg. Also gilt:

$$< f, \mathcal{A}_- g >_\rho = \sqrt{\rho(1-\rho)} \sum_{\substack{\Omega \subseteq \mathbf{Z}^2 \\ |\Omega| = n}} \left[\sum_{\substack{x \in \mathbf{Z}^2 \\ x \notin \Omega \\ x+e_1 \in \Omega}} f_\Omega g_{\Omega \cup \{x\}} - \sum_{\substack{x \in \Omega \\ x+e_1 \notin \Omega}} f_\Omega g_{\Omega \cup \{x+e_1\}} \right],$$

und dies stimmt mit dem für $< -\mathcal{A}_+ f, g >_\rho$ erhaltenen Ergebnis überein.

Wir zeigen jetzt, daß $\mathcal{A}_-$ auch bezüglich $\ll \cdot, \cdot \gg_\rho$ zu $-\mathcal{A}_+$ adjungiert ist: Eine elementare Rechnung ergibt, daß $\mathcal{A}_+$ für jedes $z \in \mathbf{Z}^2$ mit dem Translationsoperator τ_z kommutiert. (Diese Tatsache beruht letztlich auf der Translationsinvarianz der Übergangswahrscheinlichkeiten.) Es folgt für $f \in \mathcal{M}_n$, $g \in \mathcal{M}_{n+1}$:

$$\begin{aligned}
\ll \mathcal{A}_- f, g \gg_\rho &= \sum_{z \in \mathbf{Z}^2} < \mathcal{A}_- f, \tau_z g >_\rho \\
&= -\sum_{z \in \mathbf{Z}^2} < f, \mathcal{A}_+ \tau_z g >_\rho \\
&= -\sum_{z \in \mathbf{Z}^2} < f, \tau_z \mathcal{A}_+ g >_\rho \\
&= - \ll f, \mathcal{A}_+ g \gg_\rho
\end{aligned}$$

Damit ist Lemma 2.3 bewiesen. □

Ab jetzt betrachten wir nur noch den Fall $\rho = 1/2$ und lassen den Index ρ fort. In diesem Fall verschwindet $\mathcal{A}_0$. Die Zerlegung

$$\mathcal{C} = \bigoplus_{j \geq 1} \mathcal{M}_j$$

des Raumes der Zylinderfunktionen mit Erwartungswert 0 und die gemäß Lemma 2.3 daran angepaßte Zerlegung

$$\mathcal{L} = \mathcal{S} + \mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_+^*$$

des Generators mit $\mathcal{S} : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$, $\mathcal{A}_+ : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_{n+1}$ und $\mathcal{A}_+^* : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_{n-1}$ erlauben es, die Resolventengleichung $(\lambda - \mathcal{L})u = w$ in der Form des folgenden unendlichen linearen Gleichungssystems zu schreiben:

$$\begin{array}{lllllll}
\mathcal{A}_+^* u_1 & & & & & = & 0 \\
\mathcal{A}_+^* u_2 & + & (\lambda - \mathcal{S})u_1 & & & = & 0 \\
\mathcal{A}_+^* u_3 & + & (\lambda - \mathcal{S})u_2 & - & \mathcal{A}_+ u_1 & = & w_2 \\
\mathcal{A}_+^* u_{k+1} & + & (\lambda - \mathcal{S})u_k & - & \mathcal{A}_+ u_{k-1} & = & 0 \text{ für } k \geq 3
\end{array}$$

Dabei ist u_k der Anteil von u, der im Raum $\mathcal{M}_k$ liegt. Aufgrund von Formel (5) ist $w_k = 0$ für $k \neq 2$, und daher $w = w_2$.

Dieses System läßt sich noch wie folgt vereinfachen:

1. $\mathcal{A}_+^* u_1$ ist konstant und daher 0 im Raum $\mathcal{C}^0$; die erste Gleichung ist daher von selbst erfüllt.

2. Eine elementare Rechnung ergibt, daß $\mathcal{S}u_1$ und $\mathcal{A}_+^* u_2$ ebenfalls im Raum $\mathcal{C}^0$ verschwinden: $\mathcal{S}u_1$ ist ein Gradient, und $\mathcal{A}_+^* u_2$ erfüllt das Kriterium aus Formel (9). Die zweite Gleichung ist daher äquivalent zu $u_1 = 0$.

Es verbleibt daher die folgende Hierarchie:

$$\begin{array}{lclcl}
\mathcal{A}_+^* u_3 & + & (\lambda - \mathcal{S})u_2 & & = & w \\
\mathcal{A}_+^* u_{k+1} & + & (\lambda - \mathcal{S})u_k & - \ \mathcal{A}_+ u_{k-1} & = & 0 \text{ für } k \geq 3
\end{array}$$

Wir betrachten jetzt das bei Grad n ($n \geq 2$) abgeschnittene Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lclclcl}
\mathcal{A}_+^* u_3^{(n)} & + & (\lambda - \mathcal{S})u_2^{(n)} & & & = & w \\
\mathcal{A}_+^* u_{k+1}^{(n)} & + & (\lambda - \mathcal{S})u_k^{(n)} & - & \mathcal{A}_+ u_{k-1}^{(n)} & = & 0 \text{ für } 3 \leq k \leq n-1 \\
 & & (\lambda - \mathcal{S})u_n^{(n)} & - & \mathcal{A}_+ u_{n-1}^{(n)} & = & 0
\end{array} \tag{11}$$

Für $n = 2$ erhalten wir als einzige Gleichung:

$$(\lambda - \mathcal{S})u_2^{(2)} = w \tag{12}$$

Wir definieren für einen Operator X den Operator κX durch

$$\kappa X := \left\{ (\lambda - \mathcal{S}) + \mathcal{A}_+^* X \mathcal{A}_+ \right\}^{-1}.$$

Man beachte:

1. Gilt bezüglich $\ll \cdot, \cdot \gg$ im Operatorensinne $X \geq Y$, so gilt $\kappa X \leq \kappa Y$. Durch Anwendung von κ wird also die Ungleichung umgekehrt.

2. Gilt $X \geq 0$, so gilt auch $\kappa X \geq 0$, denn $\lambda - \mathcal{S}$ ist bezüglich $\ll \cdot, \cdot \gg$ positiv (siehe [6], Formel (1.6)).

Wir definieren die Operatoren $(\mathcal{T}_i)_{i \geq 2}$ durch

$$\mathcal{T}_i := \kappa^{i-2}(\lambda - \mathcal{S})^{-1}.$$

Es gilt also $\mathcal{T}_2 = (\lambda - \mathcal{S})^{-1}$, $\mathcal{T}_i = \left\{ (\lambda - \mathcal{S}) + \mathcal{A}_+^* \mathcal{T}_{i-1} \mathcal{A}_+ \right\}^{-1}$ für $i \geq 3$, und alle $\mathcal{T}_i$ sind bezüglich $\ll \cdot, \cdot \gg$ positiv.

Lemma 2.4 *Für $n \geq 2$ gilt:*

$$u_2^{(n)} = \mathcal{T}_n w$$

Beweis : Für $n = 2$ folgt die Behauptung unmittelbar aus (12). Sei daher ab jetzt $n \geq 3$. Wir zeigen zunächst mit vollständiger Induktion, daß für $3 \leq k \leq n$ gilt:

$$u_k^{(n)} = \mathcal{T}_{n+2-k}\mathcal{A}_+ u_{k-1}^{(n)} \tag{13}$$

Wir beginnen die Induktion mit dem Fall $k = n$. Lösen wir die letzte Gleichung des bei Grad n abgeschnittenen Gleichungssystems (11) nach $u_n^{(n)}$ auf, so erhalten wir wie behauptet:

$$\begin{aligned} u_n^{(n)} &= (\lambda - \mathcal{S})^{-1}\mathcal{A}_+ u_{n-1}^{(n)} \\ &= \mathcal{T}_2\mathcal{A}_+ u_{n-1}^{(n)} \\ &= \mathcal{T}_{n+2-n}\mathcal{A}_+ u_{n-1}^{(n)} \end{aligned}$$

Für den Induktionsschritt sei $3 \leq k \leq n-1$, und wir nehmen an, daß

$$u_{k+1}^{(n)} = \mathcal{T}_{n+1-k}\mathcal{A}_+ u_k^{(n)}.$$

Setzen wir dies in (11) ein, so erhalten wir:

$$\mathcal{A}_+^*\mathcal{T}_{n+1-k}\mathcal{A}_+ u_k^{(n)} + (\lambda - \mathcal{S})u_k^{(n)} - \mathcal{A}_+ u_{k-1}^{(n)} = 0$$

Lösen wir nun diese Gleichung nach $u_k^{(n)}$ auf, so erhalten wir wie behauptet:

$$\begin{aligned} u_k^{(n)} &= \left\{(\lambda - \mathcal{S}) + \mathcal{A}_+^*\mathcal{T}_{n+1-k}\mathcal{A}_+\right\}^{-1}\mathcal{A}_+ u_{k-1}^{(n)} \\ &= \mathcal{T}_{n+2-k}\mathcal{A}_+ u_{k-1}^{(n)} \end{aligned}$$

Damit ist (13) bewiesen. Für $k = 3$ lautet (13):

$$u_3^{(n)} = \mathcal{T}_{n-1}\mathcal{A}_+ u_2^{(n)}$$

Setzen wir dies in die erste Gleichung von (11) ein, so erhalten wir:

$$\mathcal{A}_+^*\mathcal{T}_{n-1}\mathcal{A}_+ u_2^{(n)} + (\lambda - \mathcal{S})u_2^{(n)} = w$$

Lösen wir dies nach $u_2^{(n)}$ auf, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} u_2^{(n)} &= \left\{(\lambda - \mathcal{S}) + \mathcal{A}_+^*\mathcal{T}_{n-1}\mathcal{A}_+\right\}^{-1} w \\ &= \mathcal{T}_n w, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Es bezeichne $\pi_n : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_n$ die orthogonale Projektion.
Sei $\mathcal{L}_n := \pi_n \mathcal{L} : \mathcal{C}_n \to \mathcal{C}_n$. Das bei Grad n abgeschnittene Gleichungssystem beschreibt die Gleichung

$$(\lambda - \mathcal{L}_n) u^{(n)} = w.$$

Wegen $w \in \mathcal{M}_2$, der Orthonormalität der Räume $\mathcal{M}_j$ bzgl. $\ll \cdot, \cdot \gg$ und nach Lemma 2.4 gilt:

$$\begin{aligned} \ll w, (\lambda - \mathcal{L}_n)^{-1} w \gg &= \ll w, u^{(n)} \gg \\ &= \ll w, u_2^{(n)} \gg \\ &= \ll w, \mathcal{T}_n w \gg \end{aligned}$$

Für $n = 3$ erhalten wir beispielsweise

$$\begin{aligned} \ll w, (\lambda - \mathcal{L}_3)^{-1} w \gg &= \ll w, \mathcal{T}_3 w \gg \\ &= \ll w, \left\{ (\lambda - \mathcal{S}) + \mathcal{A}_+^* (\lambda - \mathcal{S})^{-1} \mathcal{A}_+ \right\}^{-1} w \gg \end{aligned} \tag{14}$$

Unser Ziel ist es nun, einen Zusammenhang zwischen dem uns eigentlich interessierenden Ausdruck $\ll w, (\lambda - \mathcal{L})^{-1} w \gg$ und $\ll w, (\lambda - \mathcal{L}_n)^{-1} w \gg$ herzustellen:

Satz 3

1.

$$\ll w, (\lambda - \mathcal{L}_3)^{-1} w \gg \leq \ll w, (\lambda - \mathcal{L}_5)^{-1} w \gg \leq \ldots \leq \ll w, (\lambda - \mathcal{L})^{-1} w \gg$$
$$\leq \ldots \leq \ll w, (\lambda - \mathcal{L}_4)^{-1} w \gg \leq \ll w, (\lambda - \mathcal{L}_2)^{-1} w \gg$$

Mit anderen Worten:

(a) Für $2 \leq n \leq m$ gilt: Ist n ungerade, so gilt:

$$\ll w, (\lambda - \mathcal{L}_n)^{-1} w \gg \leq \ll w, (\lambda - \mathcal{L}_m)^{-1} w \gg$$

(b) Ist hingegen n gerade, so gilt:

$$\ll w, (\lambda - \mathcal{L}_n)^{-1} w \gg \geq \ll w, (\lambda - \mathcal{L}_m)^{-1} w \gg$$

(c) Für jede ungerade Zahl $n \geq 3$ und jede gerade Zahl $m \geq 2$ gilt:

$$\ll w, (\lambda - \mathcal{L}_n)^{-1} w \gg \leq \ll w, (\lambda - \mathcal{L})^{-1} w \gg \leq \ll w, (\lambda - \mathcal{L}_m)^{-1} w \gg$$

2.
$$\ll w, (\lambda - \mathcal{L})^{-1} w \gg = \lim_{n\to\infty} \ll w, (\lambda - \mathcal{L}_n)^{-1} w \gg$$

Bemerkung : $\ll w, (\lambda - \mathcal{L})^{-1} w \gg$ läßt sich also durch Wahl immer größerer Werte für n beliebig genau nach oben und unten durch $\ll w, (\lambda - \mathcal{L}_n)^{-1} w \gg$ abschätzen. Allerdings wird der Ausdruck $(\lambda - \mathcal{L}_n)^{-1} w$ mit wachsendem n immer komplizierter. Wir verwenden daher in dieser Arbeit nur die untere Schranke bei Grad 3:

$$\ll w, (\lambda - \mathcal{L})^{-1} w \gg \geq \ll w, (\lambda - \mathcal{L}_3)^{-1} w \gg$$

Beweis : Wir zeigen zuerst 1.(a) und 1.(b). Sei $2 \leq n < m$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_n &= \kappa^{n-2}(\lambda - \mathcal{S})^{-1} \\
\mathcal{T}_m &= \kappa^{m-2}(\lambda - \mathcal{S})^{-1} \\
&= \kappa^{n-1}\kappa^{m-n-1}(\lambda - \mathcal{S})^{-1} \\
&= \kappa^{n-2}\kappa\mathcal{T}_{m-n+1} \\
&= \kappa^{n-2}\left\{(\lambda - \mathcal{S}) + \mathcal{A}_+^*\mathcal{T}_{m-n+1}\mathcal{A}_+\right\}^{-1}
\end{aligned}$$

Da $\mathcal{T}_{m-n+1}$ positiv ist, gilt $\left\{(\lambda - \mathcal{S}) + \mathcal{A}_+^*\mathcal{T}_{m-n+1}\mathcal{A}_+\right\}^{-1} \leq (\lambda - \mathcal{S})^{-1}$. Durch die $(n-2)$-malige Anwendung von κ wird nun $(n-2)$-mal die Ungleichung umgekehrt. Ist also n ungerade, so folgt $\mathcal{T}_n \leq \mathcal{T}_m$. Ist hingegen n gerade, so gilt $\mathcal{T}_n \geq \mathcal{T}_m$. Wegen $\ll w, (\lambda - \mathcal{L}_n)^{-1} w \gg = \ll w, \mathcal{T}_n w \gg$ sind damit 1.(a) und 1.(b) bewiesen.

1.(c) folgt offenbar aus 1.(a), 1.(b) und 2. Wir müssen also noch zeigen:

$$\lim_{n\to\infty} \ll w, (\lambda - \mathcal{L}_n)^{-1} w \gg = \ll w, (\lambda - \mathcal{L})^{-1} w \gg .$$

Hierzu verwenden wir die folgende Variationsformel:
Ist der Operator Q symmetrisch und positiv definit, so gilt:

$$\ll w, Q^{-1} w \gg = \sup_{f\in\mathcal{C}} \left[2 \ll f, w \gg - \ll f, Qf \gg\right] \tag{15}$$

Ferner sei für einen Operator M der symmetrische Teil mit M_s bezeichnet. Ist dann M invertierbar, so trifft dies auch auf M_s und $(M^{-1})_s$, und es gilt:

$$\{[M^{-1}]_s\}^{-1} = M^*(M_s)^{-1}M$$

Wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
& \ll w, (\lambda - \mathcal{L})^{-1} w \gg \\
= \; & \ll w, \left[(\lambda - \mathcal{L})^{-1}\right]_s w \gg \\
= \; & \ll w, \left(\left(\left[(\lambda - \mathcal{L})^{-1}\right]_s\right)^{-1}\right)^{-1} w \gg \\
= \; & \ll w, \left((\lambda - \mathcal{L})^* (\lambda - \mathcal{S})^{-1} (\lambda - \mathcal{L})\right)^{-1} w \gg \\
= \; & \sup_{f \in \mathcal{C}} \left\{2 \ll f, w \gg - \ll f, (\lambda - \mathcal{L})^* (\lambda - \mathcal{S})^{-1} (\lambda - \mathcal{L}) f \gg\right\} \\
= \; & \sup_{f \in \mathcal{C}} \left\{2 \ll f, w \gg - \ll (\lambda - \mathcal{L}) f, (\lambda - \mathcal{S})^{-1} (\lambda - \mathcal{L}) f \gg\right\} \\
= \; & \sup_{f \in \mathcal{C}} \left\{2 \ll f, w \gg - \ll (\lambda - \mathcal{S}) f - \mathcal{A} f, f - (\lambda - \mathcal{S})^{-1} \mathcal{A} f \gg\right\} \\
= \; & \sup_{f \in \mathcal{C}} \left\{2 \ll f, w \gg - \ll (f, \lambda - \mathcal{S}) f \gg - \ll \mathcal{A} f, (\lambda - \mathcal{S})^{-1} \mathcal{A} f \gg\right\} \qquad (16) \\
= \; & \sup_{f \in \mathcal{C}} \left\{2 \ll f, w \gg - \ll (f, \lambda - \mathcal{S}) f \gg - \sup_{g \in \mathcal{C}} \{2 \ll \mathcal{A} f, g \gg - \ll g, (\lambda - \mathcal{S}) g \gg\}\right\} \\
= \; & \sup_{f \in \mathcal{C}} \inf_{g \in \mathcal{C}} \{2 \ll f, w \gg - \ll (f, \lambda - \mathcal{S}) f \gg -2 \ll \mathcal{A} f, g \gg + \ll g, (\lambda - \mathcal{S}) g \gg\} \\
= \; & \sup_{f \in \mathcal{C}} \inf_{g \in \mathcal{C}} \{2 \ll f, w - \mathcal{A}^* g \gg - \ll f, (\lambda - \mathcal{S}) f \gg + \ll g, (\lambda - \mathcal{S}) g \gg\}
\end{aligned}
$$

Seien nun

$$
a_n := \sup_{f \in \mathcal{C}_n} \inf_{g \in \mathcal{C}} \{2 \ll f, w - \mathcal{A}^* g \gg - \ll f, (\lambda - \mathcal{S}) f \gg + \ll g, (\lambda - \mathcal{S}) g \gg\}
$$

und

$$
a^n := \sup_{f \in \mathcal{C}} \inf_{g \in \mathcal{C}_n} \{2 \ll f, w - \mathcal{A}^* g \gg - \ll f, (\lambda - \mathcal{S}) f \gg + \ll g, (\lambda - \mathcal{S}) g \gg\}.
$$

Da die Räume $\mathcal{C}_n$ den Raum $\mathcal{C}$ ausschöpfen ($\mathcal{C} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{C}_n$ gemäß Formel (8)), gilt:

$$
\begin{aligned}
a_n & \nearrow \ll w, (\lambda - \mathcal{L})^{-1} w \gg \\
a^n & \searrow \ll w, (\lambda - \mathcal{L})^{-1} w \gg
\end{aligned}
$$

Wir zeigen jetzt:

$$
a_n \leq \ll w, (\lambda - \mathcal{L}_n)^{-1} w \gg \leq a^n :
$$

Wie für $\ll w, (\lambda - \mathcal{L})^{-1} w \gg$ erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
& \ll w, (\lambda - \mathcal{L}_n)^{-1} w \gg \\
= \; & \sup_{f \in \mathcal{C}_n} \inf_{g \in \mathcal{C}_n} \{2 \ll f, w - \mathcal{A}_n^* g \gg - \ll f, (\lambda - \mathcal{S}_n) f \gg + \ll g, (\lambda - \mathcal{S}_n) g \gg\},
\end{aligned}
$$

wobei $\mathcal{S}_n := \pi_n \mathcal{S}$ und $\mathcal{A}_n^* := \pi_n \mathcal{A}^*$.
Da $\mathcal{S}$ den Grad nicht erhöht, gilt $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}$.
Ferner gilt $\ll f, \mathcal{A}_n^* g \gg \; = \; \ll f, \mathcal{A}^* g \gg$, da $f \in \mathcal{C}_n$ und da die Räume $\mathcal{M}_n$ bezüglich $\ll \cdot, \cdot \gg_\rho$ aufeinander senkrecht stehen. Es folgt:

$$\begin{aligned} & \ll w, (\lambda - \mathcal{L}_n)^{-1} w \gg \\ = \; & \sup_{f \in \mathcal{C}_n} \inf_{g \in \mathcal{C}_n} \{ 2 \ll f, w - \mathcal{A}^* g \gg - \ll f, (\lambda - \mathcal{S}) f \gg + \ll g, (\lambda - \mathcal{S}) g \gg \} \end{aligned}$$

und damit

$$a_n \leq \; \ll w, (\lambda - \mathcal{L}_n)^{-1} w \gg \; \leq a^n.$$

Die Folge $(\ll w, (\lambda - \mathcal{L}_n)^{-1} w \gg)_{n \in \mathbf{N}}$ ist also zwischen den Folgen $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ und $(a^n)_{n \in \mathbf{N}}$, die beide gegen $\ll w, (\lambda - \mathcal{L})^{-1} w \gg$ konvergieren, eingeklemmt; folglich konvergiert auch sie gegen $\ll w, (\lambda - \mathcal{L})^{-1} w \gg$.
Damit ist Satz 3 bewiesen. $\square$

3 Untere Schranke bei Grad 3 mittels Fourier-Transformation

Gemäß Satz 3 und Formel (14) verfügen wir bereits über die folgende Abschätzung bei Grad 3:

$$\begin{aligned} \ll w, (\lambda - \mathcal{L})^{-1} w \gg \; &\geq \; \ll w, (\lambda - \mathcal{L}_3)^{-1} w \gg \\ &= \; \ll w, \left[(\lambda - \mathcal{S}) + \mathcal{A}_+^* [\lambda - \mathcal{S}]^{-1} \mathcal{A}_+ \right]^{-1} w \gg \end{aligned} \tag{17}$$

$\mathcal{S}$, $\mathcal{A}_+$ und $\mathcal{A}_+^* = -\mathcal{A}_-$ sind dabei Operatoren, die auf dem Raum $\mathcal{M}_n$ der Zylinderfunktionen vom Grad n definiert sind. Sie sind durch die in Lemma 2.3 angegebenen Formeln explizit gegeben. Nach Definition von $\mathcal{M}_n$ (siehe Formel (6)) und wegen der Orthonormalität der Funktionen ξ_Λ läßt sich jede Zylinderfunktion $f \in \mathcal{M}_n$ auf eindeutige Weise als Linearkombination der Funktionen ξ_Λ mit $|\Lambda| = n$ darstellen. Daher läßt sich ein $f \in \mathcal{M}_n$ auch als eine Funktion auffassen, die jeder n-elementigen Teilmenge von $\mathbf{Z}^2$ eine reelle Zahl zuordnet, wobei nur endlich vielen Mengen ein von 0 verschiedener Wert zugeordnet wird.
Stattdessen können wir f auch wie folgt als symmetrische reelle Funktion auf $(\mathbf{Z}^2)^n$ mit endlichem Träger auffassen:

$$f(x_1, \ldots, x_n) := \begin{cases} f_{\{x_1,\ldots,x_n\}} & , \text{ falls die } x_i \text{ paarweise verschieden sind} \\ 0 & \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Sei

$$\mathcal{E}_1 := \mathcal{E}_1^{(n)} := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbf{Z}^2)^n \mid x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j\}. \tag{18}$$

Dann gilt also bis auf kanonischen Isomorphismus:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n \; = \; &\{f : (\mathbf{Z}^2)^n \to \mathbf{R} \mid f \text{ ist symmetrisch, hat endlichen Träger} \\ &\text{und verschwindet außerhalb von } \mathcal{E}_1\} \end{aligned} \tag{19}$$

Wir werden im Folgenden auch Funktionen betrachten, die nicht unbedingt außerhalb von $\mathcal{E}_1$ verschwinden und definieren daher:

$$M_n := \{F : (\mathbf{Z}^2)^n \to \mathbf{R} \mid F \text{ ist symmetrisch und hat endlichen Träger}\} \tag{20}$$

In Analogie zu den Räumen $\mathcal{C}_n$ und $\mathcal{C}$ (siehe Formeln (7) und (8)) definieren wir ferner:

$$C_n := \bigoplus_{j=1}^{n} M_j$$

und

$$C := \bigcup_{n \geq 1} C_n = \bigoplus_{j \geq 1} M_j.$$

Für $F \in M_n$ definieren wir

$$< F > := \frac{1}{n!} \sum_{x \in (\mathbf{Z}^2)^n} F(x).$$

Für zwei Funktionen $F, G \in M_n$ definieren wir ihr Skalarprodukt durch

$$< F, G > := < FG > .$$

Für $F, G \in \mathcal{M}_n$ stimmt dies mit dem in Formel (2) definierten Skalarprodukt überein, da sich die Elemente einer n-elementigen Menge auf genau $n!$ Weisen anordnen lassen.

Außerdem sei

$$\ll F, G \gg := \sum_{x \in \mathbf{Z}^2} < \tau_x F, G >, \tag{21}$$

wobei

$$(\tau_x F)(z_1, \ldots, z_n) := F(z_1 + x, \ldots, z_n + x).$$

Die Summe in (21) ist in Wahrheit endlich, da f und g endlichen Träger haben.

Welche Darstellung haben bezüglich dieser neuen Sichtweise der Zylinderfunktionen die Operatoren $\mathcal{S}$ und $\mathcal{A}_+$?

Lemma 3.1

1. *Für $f \in \mathcal{M}_n$ und $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{E}_1^{(n)}$ gilt:*

$$(\mathcal{S}f)(x_1, \ldots, x_n)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma \in \{1,-1\}} \sum_{j=1}^{2} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} [1 - \delta(x_i + \sigma e_j - x_k)][f(x_1, \ldots, x_i + \sigma e_j, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)]$$

2. *Für $f \in \mathcal{M}_n$ und $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathcal{E}_1^{(n+1)}$ gilt:*

$$(\mathcal{A}_+ f)(x_1, \ldots, x_{n+1})$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \delta(x_j - x_i - e_1)[f(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}) - f(x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{n+1})]$$

Dabei sei für $y \in \mathbf{Z}^2$ $\delta(y) := 1$, falls $y = 0$, und $\delta(y) := 0$ sonst. Ferner bedeute $\hat{x}_i$, daß der Vektor x_i ausgelassen wird.
Man beachte, daß $\mathcal{S}$ bis auf das Produkt der Delta-Funktionen (und den Faktor $\frac{1}{2}$) mit dem diskreten Laplace-Operator übereinstimmt.

Beweis : Wir gehen von den expliziten Darstellungen von $\mathcal{S}$ und $\mathcal{A}_+$ in Lemma 2.3 aus und betrachten zunächst $\mathcal{S}$. Für $f \in \mathcal{M}_n$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}f &= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{x\in\mathbf{Z}^2}\sum_{\substack{\Omega\subseteq\mathbf{Z}^2\\|\Omega|=n-1\\\Omega\cap\{x,x+e_j\}=\emptyset}}[f_{\Omega\cup\{x+e_j\}}-f_{\Omega\cup\{x\}}][\xi_{\Omega\cup\{x+e_j\}}-\xi_{\Omega\cup\{x\}}]\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{x\in\mathbf{Z}^2}\left[\sum_{\substack{\Omega\subseteq\mathbf{Z}^2\\|\Omega|=n-1\\\Omega\cap\{x,x+e_j\}=\emptyset}}[f_{\Omega\cup\{x+e_j\}}-f_{\Omega\cup\{x\}}]\xi_{\Omega\cup\{x+e_j\}}\right.\\
&\qquad\left.-\sum_{\substack{\Omega\subseteq\mathbf{Z}^2\\|\Omega|=n-1\\\Omega\cap\{x,x+e_j\}=\emptyset}}[f_{\Omega\cup\{x+e_j\}}-f_{\Omega\cup\{x\}}]\xi_{\Omega\cup\{x\}}\right]\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{x\in\mathbf{Z}^2}\left[\sum_{\substack{\Lambda\subseteq\mathbf{Z}^2\\|\Lambda|=n\\x\notin\lambda\\x+e_j\in\Lambda}}[f_\Lambda-f_{\Lambda\cup\{x\}\setminus\{x+e_j\}}]\xi_\Lambda-\sum_{\substack{\Lambda\subseteq\mathbf{Z}^2\\|\Lambda|=n\\x\in\lambda\\x+e_j\notin\Lambda}}[f_\Lambda-f_{\Lambda\cup\{x+e_j\}\setminus\{x\}}]\xi_\Lambda\right]\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\substack{\Lambda\subseteq\mathbf{Z}^2\\|\Lambda|=n}}\sum_{j=1}^{2}\left[\sum_{\substack{x\in\mathbf{Z}^2\\x\notin\Lambda\\x+e_j\in\Lambda}}[f_\Lambda-f_{\Lambda\cup\{x\}\setminus\{x+e_j\}}]-\sum_{\substack{x\in\Lambda\\x+e_j\notin\Lambda}}[f_\Lambda-f_{\Lambda\cup\{x+e_j\}\setminus\{x\}}]\right]\xi_\Lambda\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\substack{\Lambda\subseteq\mathbf{Z}^2\\|\Lambda|=n}}\sum_{j=1}^{2}\left[\sum_{\substack{y\in\Lambda\\y-e_j\notin\Lambda}}[f_\Lambda-f_{\Lambda\cup\{y-e_j\}\setminus\{y\}}]-\sum_{\substack{x\in\Lambda\\x+e_j\notin\Lambda}}[f_\Lambda-f_{\Lambda\cup\{x+e_j\}\setminus\{x\}}]\right]\xi_\Lambda
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$(\mathcal{S}f)_\Lambda = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\left[\sum_{\substack{y\in\Lambda\\ y-e_j\notin\Lambda}}[f_\Lambda - f_{\Lambda\cup\{y-e_j\}\setminus\{y\}}] - \sum_{\substack{x\in\Lambda\\ x+e_j\notin\Lambda}}[f_\Lambda - f_{\Lambda\cup\{x+e_j\}\setminus\{x\}}]\right].$$

Wir formen diesen Ausdruck noch weiter um. Hierzu verwenden wir folgende Bezeichnungsweise: Für eine Aussage A sei $1_A := 1$, wenn die Aussage erfüllt ist, und $1_A := 0$ sonst. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}f)_\Lambda &= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\left[\sum_{\substack{x\in\Lambda\\ x-e_j\notin\Lambda}}[f_\Lambda - f_{\Lambda\cup\{x-e_j\}\setminus\{x\}}] - \sum_{\substack{x\in\Lambda\\ x+e_j\notin\Lambda}}[f_\Lambda - f_{\Lambda\cup\{x+e_j\}\setminus\{x\}}]\right]\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{x\in\Lambda}\sum_{\sigma\in\{1,-1\}} 1_{x+\sigma e_j\notin\Lambda}[f_\Lambda - f_{\Lambda\cup\{x+\sigma e_j\}\setminus\{x\}}]\\
&= \frac{1}{2}\sum_{x\in\Lambda}\sum_{\sigma\in\{1,-1\}}\sum_{j=1}^{2} 1_{x+\sigma e_j\notin\Lambda}[f_{\Lambda\cup\{x+\sigma e_j\}\setminus\{x\}} - f_\Lambda]
\end{aligned}$$

Für $\Lambda = \{x_1, \ldots, x_n\}$ mit paarweise verschiedenen x_i erhält man wie behauptet:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}f)(x_1,\ldots,x_n) &= (\mathcal{S}f)_{\{x_1,\ldots,x_n\}}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in\{1,-1\}}\sum_{j=1}^{2} 1_{x_i+\sigma e_j\notin\{x_1,\ldots,x_n\}}[f_{\{x_1,\ldots,x_i+\sigma e_j,\ldots,x_n\}} - f_{\{x_1,\ldots,x_n\}}]\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in\{1,-1\}}\sum_{j=1}^{2}\prod_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n}[1-\delta(x_i+\sigma e_j - x_k)]\\
&\quad \times[f(x_1,\ldots,x_i+\sigma e_j,\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_n)]
\end{aligned}$$

Wir führen jetzt eine analoge Rechnung für $\mathcal{A}_+$ durch.
Gemäß Lemma 2.3 gilt (beachte $\rho = \frac{1}{2}$):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_+ f &= -\frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbf{Z}^2}\sum_{\substack{\Omega\subseteq\mathbf{Z}^2\\ |\Omega|=n-1\\ \Omega\cap\{x,x+e_1\}=\emptyset}}[f_{\Omega\cup\{x+e_1\}} - f_{\Omega\cup\{x\}}]\xi_{\Omega\cup\{x,x+e_1\}}\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbf{Z}^2}\sum_{\substack{\Lambda\subseteq\mathbf{Z}^2\\ |\Lambda|=n+1\\ x,x+e_1\in\Lambda}}[f_{\Lambda\setminus\{x\}} - f_{\Lambda\setminus\{x+e_1\}}]\xi_\Lambda
\end{aligned}$$

$$= \quad -\frac{1}{2} \sum_{\substack{\Lambda \subseteq \mathbf{Z}^2 \\ |\Lambda|=n+1}} \sum_{\substack{x \in \Lambda \\ x+e_1 \in \Lambda}} [f_{\Lambda \setminus \{x\}} - f_{\Lambda \setminus \{x+e_1\}}] \xi_\Lambda$$

Also gilt:

$$(\mathcal{A}_+ f)_\Lambda = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{x \in \Lambda \\ x+e_1 \in \Lambda}} [f_{\Lambda \setminus \{x\}} - f_{\Lambda \setminus \{x+e_1\}}]$$

Für $\Lambda = \{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ mit paarweise verschiedenen x_i erhält man:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}_+ f)(x_1, \ldots, x_{n+1}) &= (\mathcal{A}_+ f)_{\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} 1_{x_i + e_1 \in \{x_1, \ldots, x_{n+1}\}} [f_{\{x_1, \ldots, x_{n+1}\} \setminus \{x_i\}} - f_{\{x_1, \ldots, x_{n+1}\} \setminus \{x_i + e_1\}}] \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \delta(x_j - x_i - e_1) \\
&\qquad \times [f(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}) - f(x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{n+1})],
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. $\square$

Wegen (17) sind wir daran interessiert,
$\ll w, (\lambda - \mathcal{L}_3)^{-1} w \gg \, = \, \ll w, \left[(\lambda - \mathcal{S}) + \mathcal{A}_+^* [\lambda - \mathcal{S}]^{-1} \mathcal{A}_+\right]^{-1} w \gg$ nach unten abzuschätzen. Dies ist aber nicht so einfach. Wir ersetzen daher $\mathcal{S}$ durch den diskreten Laplace-Operator Δ und $\mathcal{A}_+$ durch einen Operator A_+, wobei Δ und A_+ auf ganz M_n und nicht nur auf $\mathcal{M}_n$ definiert sind. Sodann wird die Fourier-Transformation ein nützliches Hilfsmittel sein.

Seien also die Operatoren $\Delta : M_n \to M_n$ und $A_+ : M_n \to M_{n+1}$ durch

$$\Delta F(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{j=1}^{n} \sum_{\sigma \in \{1,-1\}} \sum_{k=1}^{2} [F(x_1, \ldots, x_j + \sigma e_k, \ldots, x_n) - F(x_1, \ldots, x_n)]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{2} [F(x_1, \ldots, x_j + e_k, \ldots, x_n) - 2F(x_1, \ldots, x_n) + F(x_1, \ldots, x_j - e_k, \ldots, x_n)]$$

und

$$A_+ F(x_1, \ldots, x_{n+1})$$

$$:= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \delta(x_j - x_i - e_1) [F(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}) - F(x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{n+1})] \tag{22}$$

definiert. Für $f \in \mathcal{M}_n$ stimmen also $A_+ f$ und $\mathcal{A}_+ f$ überein, und Δf und $\mathcal{S} f$ unterscheiden sich (um den unerheblichen konstanten Faktor $\frac{1}{2}$) und ein Produkt von Delta-Funktionen.

Wir definieren ferner

$$A := A_+ - A_+^*,$$
$$L := \Delta + A$$

und

$$L_n := \pi_n L : C_n \to C_n,$$

wobei $\pi_n : C \to C_n$ die Projektion sei.

Im nächsten Kapitel werden wir den folgenden Satz beweisen, mit dem wir $\ll w, (\lambda - \mathcal{L}_n)^{-1} w \gg$ nach unten durch $\ll w, (\lambda - L_n)^{-1} w \gg$ abschätzen können, so daß wir ab jetzt L_3 statt $\mathcal{L}_3$ untersuchen können.

Satz 4 *Es gibt ein $C > 0$, so daß für alle $n \geq 3$ und alle genügend kleinen $\lambda > 0$ gilt:*

$$\ll w, (\lambda - \mathcal{L}_n)^{-1} w \gg \geq \frac{\ll w, (\lambda - L_n)^{-1} w \gg}{C n^6}$$

Wir definieren die *Fourier-Transformierte* von $F \in M_n$ durch

$$\hat{F}(p) := \sum_{x \in (\mathbf{Z}^2)^n} F(x) e^{-ix \cdot p} \tag{23}$$

für $p \in (\mathbf{R}^2)^n$, wobei

$$x \cdot p := \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{2} x_{jk} p_{jk}$$

das Standard-Skalarprodukt auf $(\mathbf{R}^2)^n$ bezeichne.

Bemerkung :

1. Die Summe in (23) ist in Wahrheit endlich, da F endlichen Träger hat.
2. Offenbar ist $\hat{F}$ periodisch mit Periode $2\pi(\mathbf{Z}^2)^n$, so daß wir $\hat{F}$ auch als Funktion auf $(\mathbf{R}^2/2\pi\mathbf{Z}^2)^n$ auffassen können.

3. Für $z \in \mathbf{Z}^2$ gilt:

$$\begin{aligned}
\widehat{\tau_z F}(p) &= \sum_{x\in(\mathbf{Z}^2)^n} F(x_1+z,\ldots,x_n+z)e^{-ix\cdot p} \\
&= \sum_{x\in(\mathbf{Z}^2)^n} F(x)e^{-i(x_1-z,\ldots,x_n-z)\cdot p} \\
&= e^{i(z,\ldots,z)\cdot p}\hat{F}(p) \\
&= e^{iz\sum_{j=1}^n p_j}\hat{F}(p)
\end{aligned}$$

4. Für $F, G \in M_n$ gilt wegen der Orthogonalität der Funktionen $e^{-ix\cdot p}$:

$$\begin{aligned}
< F,G > &= \frac{1}{n!(2\pi)^{2n}} \int_{(\mathbf{R}^2/2\pi\mathbf{Z}^2)^n} \hat{F}(p)\overline{\hat{G}(p)}dp \\
&:= \frac{1}{n!(2\pi)^{2n}} \int_{([-\pi,\pi]^2)^n} \hat{F}(p)\overline{\hat{G}(p)}dp
\end{aligned}$$

5. Aus 3. und 4. folgt:

$$\begin{aligned}
\ll F,G \gg &= \sum_{z\in\mathbf{Z}^2} < \tau_z F, G > \\
&= \frac{1}{n!(2\pi)^{2n}} \sum_{z\in\mathbf{Z}^2} \int_{([-\pi,\pi]^2)^n} \widehat{\tau_z F}(p)\overline{\hat{G}(p)}dp \\
&= \frac{1}{n!(2\pi)^{2n}} \sum_{z\in\mathbf{Z}^2} \int_{([-\pi,\pi]^2)^n} \hat{F}(p)\overline{\hat{G}(p)}e^{iz\sum_{j=1}^n p_j}dp
\end{aligned}$$

Lemma 3.2 *Für $F, G \in M_n$ hat $\ll F,G \gg$ den Wert*

$$\frac{1}{n!(2\pi)^{2(n-1)}} \int_{([-\pi,\pi]^2)^{n-1}} \hat{F}(p_1,\ldots,p_{n-1},-\sum_{j=1}^{n-1}p_j)\overline{\hat{G}(p_1,\ldots,p_{n-1},-\sum_{j=1}^{n-1}p_j)}dp_1\ldots dp_{n-1}$$

Beweis : Nach der letzten Bemerkung gilt:

$$\ll F,G \gg = \frac{1}{n!(2\pi)^{2n}} \sum_{z\in\mathbf{Z}^2} \int_{([-\pi,\pi]^2)^n} \hat{F}(p_1,\ldots,p_n)\overline{\hat{G}(p_1,\ldots,p_n)}e^{iz\sum_{j=1}^n p_j}dp_1\ldots dp_n$$

Wir formen zunächst das Integral um. Hierzu substituieren wir $(p_1,\ldots,p_n)$ durch

$$\tilde{p} := \phi(p_1,\ldots,p_n) := (p_1,\ldots,p_{n-1},p_n - \sum_{j=1}^{n-1}p_j).$$

Wegen $\det(\phi) = 1$ erhalten wir nach dem Transformationssatz:

$$\int_{([-\pi,\pi]^2)^n} \hat{F}(p_1, \ldots, p_n)\overline{\hat{G}(p_1, \ldots, p_n)} e^{iz\sum_{j=1}^n p_j} dp_1 \ldots dp_n$$

$$= \int_{\phi^{-1}(([-\pi,\pi]^2)^n)} \hat{F}(\tilde{p})\overline{\hat{G}(\tilde{p})} e^{izp_n} dp_1 \ldots dp_n \tag{24}$$

Es gilt:

$$\phi^{-1}(([-\pi, \pi]^2)^n) = \{(p_1, \ldots, p_n) \in (\mathbf{R}^2)^n \mid p_1, \ldots, p_{n-1}, p - \sum_{j=1}^{n-1} p_j \in [-\pi, \pi]^2\}$$

Daher ist $\phi^{-1}(([-\pi, \pi]^2)^n)$ ebenso wie $([-\pi, \pi]^2)^n$ bis auf eine Nullmenge ein eindeutiges Vertretersystem für $(\mathbf{R}^2/2\pi\mathbf{Z}^2)^n$. Wegen der Periodizität des Integranden können wir daher in (24) statt über $\phi^{-1}(([-\pi, \pi]^2)^n)$ über $([-\pi, \pi]^2)^n$ integrieren und erhalten:

$$\begin{aligned}
& \int_{\phi^{-1}(([-\pi,\pi]^2)^n)} \hat{F}(\tilde{p})\overline{\hat{G}(\tilde{p})} e^{izp_n} dp_1 \ldots dp_n \\
= & \int_{([-\pi,\pi]^2)^n} \hat{F}(\tilde{p})\overline{\hat{G}(\tilde{p})} e^{izp_n} dp_1 \ldots dp_n \\
= & \int_{[-\pi,\pi]^2} \left[\int_{([-\pi,\pi]^2)^{n-1}} \hat{F}(\tilde{p})\overline{\hat{G}(\tilde{p})} dp_1 \ldots dp_{n-1}\right] e^{izp_n} dp_n
\end{aligned}$$

Den Ausdruck in den eckigen Klammern bezeichnen wir mit $H(p_n)$. Damit gilt also:

$$\ll F, G \gg = \frac{1}{n!(2\pi)^{2n}} \sum_{z\in\mathbf{Z}^2} \int_{[-\pi,\pi]^2} H(p_n) e^{izp_n} dp_n$$

Nun ist aber

$$\sum_{z\in\mathbf{Z}^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{[-\pi,\pi]^2} H(p_n) e^{izp_n} dp_n$$

gerade der Wert der Fourier-Reihe von H an der Stelle 0, der wegen der Differenzierbarkeit von H mit $H(0)$ übereinstimmt. (Da F und G endlichen Träger haben, sind $\hat{F}$ und $\hat{G}$ und daher auch H unendlich oft differenzierbar.) Es folgt:

$$\ll F, G \gg = \frac{(2\pi)^2}{n!(2\pi)^{2n}} H(0)$$

$$= \frac{1}{n!(2\pi)^{2(n-1)}} \int_{([-\pi,\pi]^2)^{n-1}} \hat{F}(p_1, \ldots, p_{n-1}, -\sum_{j=1}^{n-1} p_j) \overline{\hat{G}(p_1, \ldots, p_{n-1}, -\sum_{j=1}^{n-1} p_j)} dp_1 \ldots dp_{n-1},$$

was zu zeigen war. $\square$

Wir berechnen jetzt die Fourier-Transformierten von $-\Delta F$ für $F \in M_n$ und A_+F für $F \in M_2$. Dabei verwenden wir die folgenden Bezeichnungen:
Für $\xi \in \mathbf{R}$ sei

$$\omega(\xi) := -[e^{i\xi} - 2 + e^{-i\xi}] = 2 - 2\cos\xi. \tag{25}$$

Man beachte, daß $\omega(\xi)$ stets reell und nichtnegativ ist und daß die Taylor-Entwicklung von $\omega(\xi)$ an der Stelle 0 bis zum Term dritter Ordnung mit der Taylor-Entwicklung von ξ^2 übereinstimmt. Wir dürfen daher in Abschätzungen für betragsmäßig kleine ξ $\omega(\xi)$ durch ξ^2 ersetzen. Wir definieren ferner für $u \in \mathbf{R}^2$:

$$\omega(u) := \omega(u_1) + \omega(u_2)$$

und für $p \in (\mathbf{R}^2)^n$:

$$\omega(p) := \sum_{j=1}^{n} \omega(p_j).$$

Lemma 3.3

1. *Für $F \in M_n$ gilt:*
$$\widehat{-\Delta F}(p) = \omega(p)\hat{F}(p)$$

2. *Für $F \in M_2$ gilt:*
$$\widehat{A_+F}(p_1, p_2, p_3) = -\frac{1}{2}\sum_{\sigma \in S_3}[e^{ie_1p_{\sigma_1}} - e^{-ie_1p_{\sigma_3}}]\hat{F}(p_{\sigma_1} + p_{\sigma_3}, p_{\sigma_2})$$

Nach Anwendung der Fourier-Transformation erhalten die Operatoren Δ und A_+ also eine relativ einfache Form.

Beweis : Wir untersuchen zuerst $\widehat{-\Delta F}$:

$$\begin{aligned}
\widehat{-\Delta F}(p) &= -\sum_{x \in (\mathbf{Z}^2)^n} \Delta F(x) e^{-ix\cdot p} \\
&= -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2}\sum_{x \in (\mathbf{Z}^2)^n} F(x_1, \ldots, x_j + e_k, \ldots, x_n)e^{-ix\cdot p} \\
&\quad +2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2}\sum_{x \in (\mathbf{Z}^2)^n} F(x_1, \ldots, x_n)e^{-ix\cdot p} \\
&\quad -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2}\sum_{x \in (\mathbf{Z}^2)^n} F(x_1, \ldots, x_j - e_k, \ldots, x_n)e^{-ix\cdot p}
\end{aligned}$$

Wir ersetzen jetzt $x = (x_1, \ldots, x_n)$ im ersten Summanden durch

$$x' := (x'_1, \ldots, x'_n) := (x_1, \ldots, x_j + e_k, \ldots, x_n) = x + (0, \ldots, e_k, \ldots, 0)$$

und im dritten Summanden durch

$$x'' := (x_1, \ldots, x_j - e_k, \ldots, x_n) = x - (0, \ldots, e_k, \ldots, 0).$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\widehat{-\Delta F}(p) &= -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2}\sum_{x'\in(\mathbf{Z}^2)^n} F(x'_1, \ldots, x'_n)e^{-i(x'-(0,\ldots,e_k,\ldots,0))\cdot p} \\
&\quad +2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2}\sum_{x\in(\mathbf{Z}^2)^n} F(x_1, \ldots, x_n)e^{-ix\cdot p} \\
&\quad -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2}\sum_{x''\in(\mathbf{Z}^2)^n} F(x''_1, \ldots, x''_n)e^{-i(x''+(0,\ldots,e_k,\ldots,0))\cdot p} \\
&= -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2}\sum_{x\in(\mathbf{Z}^2)^n} F(x_1, \ldots, x_n)e^{-ix\cdot p}e^{ie_kp_j} \\
&\quad +2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2}\sum_{x\in(\mathbf{Z}^2)^n} F(x_1, \ldots, x_n)e^{-ix\cdot p} \\
&\quad -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2}\sum_{x\in(\mathbf{Z}^2)^n} F(x_1, \ldots, x_n)e^{-ix\cdot p}e^{-ie_kp_j} \\
&= -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2}\left[\sum_{x\in(\mathbf{Z}^2)^n} F(x_1, \ldots, x_n)e^{-ix\cdot p}\right]\left[e^{ie_kp_j} - 2 + e^{-ie_kp_j}\right] \\
&= -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{2}\left[e^{ie_kp_j} - 2 + e^{-ie_kp_j}\right]\hat{F}(p) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\omega(p_j)\hat{F}(p) \\
&= \omega(p)\hat{F}(p)
\end{aligned}$$

Damit ist die erste Behauptung bewiesen.

Jetzt berechnen wir $\widehat{A_+F}$ für $F \in M_2$. Gemäß Formel (22) gilt:

$$
\begin{aligned}
&(A_+F)(x_1,x_2,x_3)\\
= &-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{3}\delta(x_k-x_j-e_1)[F(x_1,\ldots,\hat{x}_j,\ldots,x_{n+1})-F(x_1,\ldots,\hat{x}_k,\ldots,x_{n+1})]\\
= &-\frac{1}{2}\sum_{\sigma\in S_3}\delta(x_{\sigma_3}-x_{\sigma_1}-e_1)[F(x_{\sigma_1}+e_1,x_{\sigma_2})-F(x_{\sigma_1},x_{\sigma_2})]
\end{aligned}
$$

Es folgt:

$$
\begin{aligned}
&\widehat{A_+F}(p_1,p_2,p_3)\\
= &\sum_{x\in(\mathbf{Z}^2)^3}(A_+F)(x)e^{-ix\cdot p}\\
= &-\frac{1}{2}\sum_{\sigma\in S_3}\sum_{\substack{x\in(\mathbf{Z}^2)^3\\x_{\sigma_3}=x_{\sigma_1}+e_1}}[F(x_{\sigma_1}+e_1,x_{\sigma_2})-F(x_{\sigma_1},x_{\sigma_2})]e^{-ix\cdot p}\\
= &-\frac{1}{2}\sum_{\sigma\in S_3}\sum_{\substack{x\in(\mathbf{Z}^2)^3\\x_{\sigma_3}=x_{\sigma_1}+e_1}}[F(x_{\sigma_1}+e_1,x_{\sigma_2})-F(x_{\sigma_1},x_{\sigma_2})]e^{-i(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)}\\
= &-\frac{1}{2}\sum_{\sigma\in S_3}\sum_{\substack{x\in(\mathbf{Z}^2)^3\\x_3=x_1+e_1}}[F(x_1+e_1,x_2)-F(x_1,x_2)]e^{-i(x_1p_{\sigma_1}+x_2p_{\sigma_2}+x_3p_{\sigma_3})}\\
= &-\frac{1}{2}\sum_{x\in(\mathbf{Z}^2)^2}\left[[F(x_1+e_1,x_2)-F(x_1,x_2)]\sum_{\sigma\in S_3}e^{-i(x_1p_{\sigma_1}+x_2p_{\sigma_2}+(x_1+e_1)p_{\sigma_3})}\right]\\
= &-\frac{1}{2}\sum_{x\in(\mathbf{Z}^2)^2}\left[F(x_1,x_2)\sum_{\sigma\in S_3}e^{-i((x_1-e_1)p_{\sigma_1}+x_2p_{\sigma_2}+x_1p_{\sigma_3})}\right]\\
&+\frac{1}{2}\sum_{x\in(\mathbf{Z}^2)^2}\left[F(x_1,x_2)\sum_{\sigma\in S_3}e^{-i(x_1p_{\sigma_1}+x_2p_{\sigma_2}+(x_1+e_1)p_{\sigma_3})}\right]\\
= &-\frac{1}{2}\sum_{\sigma\in S_3}\sum_{x\in(\mathbf{Z}^2)^2}F(x_1,x_2)\\
&\times\left[e^{-i((x_1-e_1)p_{\sigma_1}+x_2p_{\sigma_2}+x_1p_{\sigma_3})}-e^{-i(x_1p_{\sigma_1}+x_2p_{\sigma_2}+(x_1+e_1)p_{\sigma_3})}\right]\\
= &-\frac{1}{2}\sum_{\sigma\in S_3}\sum_{x\in(\mathbf{Z}^2)^2}F(x_1,x_2)e^{-i(x_1p_{\sigma_1}+x_2p_{\sigma_2}+x_1p_{\sigma_3})}\left[e^{ie_1p_{\sigma_1}}-e^{-e_1p_{\sigma_3}}\right]
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{\sigma\in S_3}\sum_{x\in(\mathbf{Z}^2)^2} F(x_1,x_2)e^{-i(x_1(p_{\sigma_1}+p_{\sigma_3})+x_2p_{\sigma_2})}[e^{ie_1p_{\sigma_1}} - e^{-e_1p_{\sigma_3}}]$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{\sigma\in S_3}[e^{ie_1p_{\sigma_1}} - e^{-e_1p_{\sigma_3}}]\hat{F}(p_{\sigma_1}+p_{\sigma_3},p_{\sigma_2})$$

Damit ist Lemma 3.3 bewiesen. □

Lemma 3.4 *Sei $F \in M_2$. Dann gibt es ein $C > 0$, so daß für alle genügend kleinen $\lambda > 0$ gilt:*

$$\ll A_+F,(\lambda-\Delta)^{-1}A_+F \gg \le C\int_{[-\pi,\pi]^2}\omega(e_1u)\,|\log(\lambda+\omega(u))|\,|\hat{F}(u,-u)|^2du$$

Beweis : Ab jetzt bezeichne C eine generische positive Konstante. Nach den beiden letzten Lemmata gilt (beachte $n = 3$):

$$\ll A_+F,(\lambda-\Delta)^{-1}A_+F \gg = \frac{1}{6(2\pi)^4}\int_{([-\pi,\pi]^2)^2}\frac{|\widehat{A_+F}(p_1,p_2,-(p_1+p_2))|^2}{\lambda+\omega(p_1)+\omega(p_2)+\omega(-(p_1+p_2))}dp_1\,dp_2 \tag{26}$$

Setze $p_3 := -(p_1+p_2)$. Nach Lemma 3.3 und der Cauchy-Schwartzschen Ungleichung gilt:

$$\begin{aligned}|\widehat{A_+F}(p_1,p_2,p_3)|^2 &= \frac{1}{4}\left|\sum_{\sigma\in S_3}[e^{ie_1p_{\sigma_1}} - e^{-ie_1p_{\sigma_3}}]\hat{F}(p_{\sigma_1}+p_{\sigma_3},p_{\sigma_2})\right|^2\\ &\le \frac{3}{2}\sum_{\sigma\in S_3}\left|e^{ie_1p_{\sigma_1}} - e^{-ie_1p_{\sigma_3}}\right|^2\left|\hat{F}(p_{\sigma_1}+p_{\sigma_3},p_{\sigma_2})\right|^2\end{aligned}$$

Da mit F auch $\hat{F}$ symmetrisch ist, können wir daher (26) nach oben durch

$$C\int_{([-\pi,\pi]^2)^2}\frac{|e^{ie_1p_1} - e^{-ie_1p_3}|^2|\hat{F}(p_1+p_3,p_2)|^2}{\lambda+\omega(p_1)+\omega(p_2)+\omega(p_3)}dp_1\,dp_2$$

abschätzen. Sei

$$\Gamma := ([-\pi,\pi]^2)^2 \setminus ([-\frac{1}{8},\frac{1}{8}]^2)^2.$$

Auf Γ ist der Nenner unabhängig von λ von 0 weg beschränkt. Da wir nur Terme berücksichtigen müssen, die für $\lambda \to 0$ divergieren, können wir unsere Aufmerksamkeit auf $([-\frac{1}{8},\frac{1}{8}]^2)^2$ beschränken. Ferner dürfen wir dort $\omega(p_i)$

durch $\|p_i\|_2^2$ ersetzen, siehe hierzu die Bemerkung zur Definition von ω (Formel (25). Wir setzen außerdem $u := p_1 + p_3$ und $v := p_1 - p_3$ und beachten $p_2 = -(p_1 + p_3)$. Ferner gilt:

$$
\begin{aligned}
|e^{ie_1 p_1} - e^{-ie_1 p_3}|^2 &= (e^{ie_1 p_1} - e^{-ie_1 p_3})\overline{(e^{ie_1 p_1} - e^{-ie_1 p_3})} \\
&= (e^{ie_1 p_1} - e^{-ie_1 p_3})(e^{-ie_1 p_1} - e^{ie_1 p_3}) \\
&= 2 - e^{ie_1(p_1+p_3)} - e^{-ie_1(p_1+p_3)} \\
&= 2 - e^{ie_1 u} - e^{-ie_1 u} \\
&= \omega(e_1 u)
\end{aligned}
$$

Es folgt:

$$
\begin{aligned}
&\ll A_+ F, (\lambda - \Delta)^{-1} A_+ F \gg \\
&\leq C \int_{[-\frac{1}{8},\frac{1}{8}]^2} \omega(e_1 u)\, |\hat{F}(u,-u)|^2 \left\{ \int_{[-\frac{1}{8},\frac{1}{8}]^2} \frac{1}{\lambda + \|\frac{u+v}{2}\|_2^2 + \|u\|_2^2 + \|\frac{u-v}{2}\|_2^2} dv \right\} du
\end{aligned} \tag{27}
$$

Für das innere Integral erhalten wir:

$$
\int_{[-\frac{1}{8},\frac{1}{8}]^2} \frac{1}{\lambda + \|\frac{u+v}{2}\|_2^2 + \|u\|_2^2 + \|\frac{u-v}{2}\|_2^2} dv \leq \int_{B_{1/5}(0)} \frac{1}{\lambda + \frac{3}{2}\|u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|v\|_2^2} dv
$$

Nach der Integrationsregel für rotationssymmetrische Funktionen ist dies gleich

$$
\begin{aligned}
& \int_0^{1/5} \frac{2\pi r}{\lambda + \frac{3}{2}\|u\|_2^2 + \frac{1}{2}r^2} dr \\
= \;& 2\pi \left[\log(\lambda + \frac{3}{2}\|u\|_2^2 + \frac{1}{50}) - \log(\lambda + \frac{3}{2}\|u\|_2^2) \right] \\
\leq \;& 2\pi \left| \log(\lambda + \frac{3}{2}\|u\|_2^2) \right| \\
\leq \;& C\, |\log(\lambda + \omega(u))\,|
\end{aligned}
$$

Setzen wir dies in (27) ein, so erhalten wir die Behauptung. $\square$

Satz 5 *Es gibt ein $C > 0$, so daß für alle genügend kleinen $\lambda > 0$ gilt:*

$$
\ll w, [\lambda - \Delta + A_+^* (\lambda - \Delta)^{-1} A_+]^{-1} w \gg \; \geq C |\log \lambda|^{1/2}
$$

Beweis : Erneut bezeichne C eine generische Konstante. Wir definieren für $\lambda > 0$ den Operator B_λ durch

$$
\ll F, B_\lambda G \gg := \int_{[-\pi,\pi]^2} \omega(e_1 u)\, |\log(\lambda + \omega(u))|\, \hat{F}(u,-u)\overline{\hat{G}(u,-u)} du.
$$

Nach Lemma 3.4 gilt für genügend kleine $\lambda > 0$ im Operatorensinne:

$$A_+^*(\lambda - \Delta)^{-1} A_+ \leq C B_\lambda$$

und daher

$$[\lambda - \Delta + A_+^*(\lambda - \Delta)^{-1} A_+]^{-1} \geq C[\lambda - \Delta + B_\lambda]^{-1}.$$

Also:

$$\begin{aligned} & \ll w, [\lambda - \Delta + A_+^*(\lambda - \Delta)^{-1} A_+]^{-1} w \gg \\ \geq C & \int_{[-\pi,\pi]^2} \frac{|\hat{w}(u,-u)|^2}{\lambda + \omega(u) + \omega(-u) + \omega(ue_1)|\log(\lambda + \omega(u))|}\, du \end{aligned} \tag{28}$$

Aufgrund von Formel (5) und wegen $\rho = \frac{1}{2}$ gilt für den Fluß w:

$$w_\Lambda = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{für } \Lambda = \{0, e_1\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bzw.

$$w(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{falls } (x_1, x_2) = (e_1, 0) \text{ oder } (x_1, x_2) = (0, e_1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die Fourier-Transformierte von w gilt daher:

$$\begin{aligned} \hat{w}(p_1, p_2) &= \frac{1}{4} e^{-i(e_1,0)\cdot(p_1,p_2)} + \frac{1}{4} e^{-i(0,e_1)\cdot(p_1,p_2)} \\ &= \frac{1}{4} e^{-ip_1 e_1} + \frac{1}{4} e^{-ip_2 e_1} \end{aligned}$$

Folglich gilt:

$$\begin{aligned} \hat{w}(u, -u) &= \frac{1}{4} e^{iue_1} + \frac{1}{4} e^{-iue_1} \\ &= \frac{1}{2} \cos(ue_1) \\ &\geq C \text{ für } u \in [-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}]^2 \end{aligned}$$

Wir bezeichnen die Komponenten von u mit ξ und η. Unter Beachtung von $\hat{w}(u,-u) \geq C$ für $u \in [-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}]^2$ und $\omega(-u) = \omega(u)$ läßt sich (28) nach unten durch

$$C \int_{-1/8}^{1/8} \int_{-1/8}^{1/8} \frac{1}{\lambda + \omega(\eta) + \omega(\xi) + \omega(\xi)\, |\log(\lambda + \omega(\eta) + \omega(\xi))|}\, d\xi\, d\eta$$

abschätzen. Wir können diesen Ausdruck bis auf einen konstanten Faktor weiter nach unten abschätzen, indem wir
$|\log(\lambda+\omega(\eta)+\omega(\xi))| \leq |\log(\lambda+\omega(\eta))|$ benutzen und $\omega(x)$ durch x^2 ersetzen. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \ll w, [\lambda - \Delta + A_+^*(\lambda - \Delta)^{-1} A_+]^{-1} w \gg \\ \geq\ & C \int_{-1/8}^{1/8} \int_{-1/8}^{1/8} \frac{1}{\lambda + \eta^2 + \xi^2 + \xi^2\, |\log(\lambda + \eta^2)|}\, d\xi\, d\eta \\ =\ & C \int_{-1/8}^{1/8} \int_{-1/8}^{1/8} \frac{1}{\lambda + \eta^2 + [\xi\ (1 + |\log(\lambda + \eta^2)|\,)^{1/2}]^2}\, d\xi\, d\eta \end{aligned}$$

Wir führen nun die Substitution $\xi(1+|\log(\lambda+\eta^2)|\,)^{1/2} =: z$ durch und können weiter nach unten abschätzen durch

$$C \int_{-1/8}^{1/8} \int_{-1/8}^{1/8} \frac{1}{(\lambda + \eta^2 + z^2)(1 + |\log(\lambda + \eta^2)|\,)^{1/2}}\, dz\, d\eta.$$

Wir schätzen weiter nach unten ab, indem wir Polarkoordinaten (r, ϕ), also

$$\begin{aligned} z &= r\cos\phi \\ \eta &= r\sin\phi \\ r^2 &= \eta^2 + z^2 \end{aligned}$$

verwenden und nur über den Bereich

$$\{(r, \phi) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq r \leq \frac{1}{20},\ \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{4}\}$$

integrieren. In diesem Bereich gilt $\eta^2 \geq z^2$, daher

$$|\log(\lambda + \eta^2)| \leq |\log(\lambda + \frac{\eta^2}{2} + \frac{z^2}{2})|$$

und folglich

$$(1 + |\log(\lambda + \eta^2)|\,)^{1/2} \leq C|\log(\lambda + \frac{\eta^2}{2} + \frac{z^2}{2})|^{1/2}\ .$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \ll w, [\lambda - \Delta + A_+^*(\lambda - \Delta)^{-1} A_+]^{-1} w \gg \\ \geq\ & C \int_0^{1/20} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{r}{(\lambda + r^2)|\log(\lambda + \frac{r^2}{2})|^{1/2}}\, d\phi\, dr \\ \geq\ & C \int_0^{1/20} \frac{r}{(\lambda + \frac{r^2}{2})|\log(\lambda + \frac{r^2}{2})|^{1/2}}\, dr \\ =\ & C \left[|\log\lambda|^{1/2} - |\log(\lambda + \frac{1}{800})|^{1/2} \right] \end{aligned}$$

Den Subtrahenden können wir nun durch die Konstante $|\log(\frac{1}{800})|^{1/2}$ nach oben abschätzen, was den Beweis des Satzes beendet. $\square$

4 Abschätzung von $\mathcal{L}_n$ durch L_n

In diesem Kapitel skizzieren wir die Strategie, um Satz 4 zu beweisen, also die Tatsache, daß sich $\ll w, (\lambda - \mathcal{L}_n)^{-1} w \gg$ nach unten durch $\ll w, (\lambda - L_n)^{-1} w \gg$ abschätzen läßt. Der Fall $n = 3$ impliziert zusammen mit den bisherigen Ergebnissen Satz 2 und damit Theorem 1, denn:

$$\begin{array}{rcll} \ll w, (\lambda - \mathcal{L})^{-1} w \gg & \geq & \ll w, (\lambda - \mathcal{L}_3)^{-1} w \gg & \text{nach Satz 3} \\ & \geq & C \ll w, (\lambda - L_3)^{-1} w \gg & \text{nach Satz 4} \\ & = & C \ll w, [\lambda - \Delta + A_+^* (\lambda - \Delta)^{-1} A_+]^{-1} w \gg & \text{nach Formel (14)} \\ & \geq & C' |\log \lambda|^{1/2} & \text{nach Satz 5} \end{array}$$

Wir erinnern an die Definition der Funktionenräume M_n und $\mathcal{M}_n$ (siehe Formeln (20) und (19)):

$$\begin{array}{rcl} M_n & := & \{F : (\mathbf{Z}^2)^n \to \mathbf{R} \mid F \text{ ist symmetrisch und hat endlichen Träger}\} \\ \mathcal{M}_n & := & \{f \in M_n \mid f \text{verschwindet außerhalb von } \mathcal{E}_1\} \end{array}$$

Dabei ist (siehe Formel (18))

$$\mathcal{E}_1 := \{x \in (\mathbf{Z}^2)^n \mid x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j\}.$$

Wir zerlegen jetzt das Komplement von $\mathcal{E}_1$ in zwei Mengen $\mathcal{E}_2$ und $\mathcal{E}_3$:
$\mathcal{E}_2$ bestehe aus genau denjenigen Punkten $x \in (\mathbf{Z}^2)^n \setminus \mathcal{E}_1$, die die folgende Bedingung erfüllen: Es ist zwar gestattet, daß $x_i = x_j$ für zwei Indizes $i \neq j$ gilt, aber dann muß $|x_i - x_k| \geq 5$ für alle $k \notin \{i, j\}$ gelten. (Dabei sei $|y| := |y_1| + |y_2|$ für $y \in \mathbf{Z}^2$.) Die Punkte aus $\mathcal{E}_2$ haben also nur isolierte Doppelstellen. Sei $\mathcal{E}_3$ die Restmenge, also $\mathcal{E}_3 := (\mathbf{Z}^2)^n \setminus (\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2)$.
Da wir nur symmetrische Funktionen auf $(\mathbf{Z}^2)^n$ betrachten, spielt die Reihenfolge der Komponenten eines Punktes $x \in (\mathbf{Z}^2)^n$ keine Rolle. Wir können daher stets annehmen, daß ein Punkt $x \in \mathcal{E}_2$ die Form $x = (x_1, x_1, \ldots, x_k, x_k, x_{2k+1}, x_{2k+2}, \ldots, x_n)$ mit paarweise verschiedenen x_i hat.

Wir definieren Operatoren $R : M_n \to \mathcal{M}_n$ und $T : \mathcal{M}_n \to M_n$ wie folgt:

Der Operator $R : M_n \to \mathcal{M}_n$ ist einfach die Einschränkungsabbildung:

$$(RF)(x) := \begin{cases} F(x) & \text{für } x \in \mathcal{E}_1 \\ 0 & \text{für } x \in \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3 \end{cases}$$

Der Operator $T : \mathcal{M}_n \to M_n$ ist wie folgt definiert:

Für $x \in \mathcal{E}_1$ sei $(Tf)(x) := f(x)$.
Für $x = (x_1, x_1, \ldots, x_k, x_k, x_{2k+1}, x_{2k+2}, \ldots, x_n) \in \mathcal{E}_2$ sei $(Tf)(x)$ das arithmetische Mittel der Funktionswerte von f an den in $\mathcal{E}_1$ gelegenen Nachbarpunkten von x, das heißt:

$$\begin{aligned} & Tf(x_1, x_1, \ldots, x_k, x_k, x_{2k+1}, x_{2k+2}, \ldots, x_n) \\ := \; & AM\{f(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k, x_{2k+1}, \ldots, x_n) \mid (y_1, \ldots, y_k) \in (\mathbf{Z}^2)^k \\ & \qquad \text{und } |x_i - y_i| = 1 \text{ für } i = 1, \ldots, k\} \end{aligned}$$

(Mit AM bezeichnen wir das arithmetische Mittel.)
Da x nur isolierte Doppelstellen hat, liegt $(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k, x_{2k+1}, \ldots, x_n)$ tatsächlich in $\mathcal{E}_1$.
Schließlich sei für $x \in \mathcal{E}_3$ $(Tf)(x) := 0$.

Durch Anwendung von T wird f also in gewisser Weise geglättet.

Man beachte, daß T und R nicht invers zueinander sind, daß aber RT die Identität auf $\mathcal{M}_n$ ist.

Mit Hilfe der Operatoren T und R können wir jetzt ein Lemma formulieren, das wir zum Beweis von Satz 4 benötigen werden. Für einen Beweis dieses Lemmas siehe [5], Lemmata 4.3 und 4.5.

Lemma 4.1 *Für jedes $n \geq 3$ gibt es eine Konstante $C = C(n) > 1$, so daß für alle $f \in \mathcal{C}_n$ und alle $F \in C_n$ gilt:*

1.

$$\ll f, (\lambda - \mathcal{S})f \gg \leq \ll Tf, (\lambda - \Delta)Tf \gg$$

2.

$$\ll F, (\lambda - \Delta)F \gg \geq \frac{1}{Cn^2} \ll TRF, (\lambda - \Delta)TRF \gg$$

3.

$$\begin{aligned} & \ll \mathcal{A}f, (\lambda - \mathcal{S})^{-1}\mathcal{A}f \gg \\ \leq \; & C\left[n^2 \ll ATf, (\lambda - \Delta)^{-1}ATf \gg + n^4 \ll Tf, (\lambda - \Delta)Tf \gg\right] \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} & \ll AF, (\lambda - \Delta)^{-1}AF \gg \\ \geq \; & \frac{1}{C} \ll ATRF, (\lambda - \Delta)^{-1}ATRF \gg - Cn^2 \ll F, (\lambda - \Delta)F \gg \end{aligned}$$

Bemerkung : In [5] werden diese Aussagen nur für $f \in \mathcal{M}_n$ und $F \in M_n$ formuliert. Sie übertragen sich aber unmittelbar auf $f \in \mathcal{C}_n$ und $F \in C_n$, denn C_n ist die direkte Summe der M_j ($j = 1, \ldots, n$), und die M_j stehen bezüglich $\ll \cdot, \cdot \gg$ aufeinander senkrecht.

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir jetzt Satz 4 beweisen. Wir erinnern daran, daß die Behauptung lautet:

Es gibt ein $C > 0$, so daß für alle $n \geq 3$ und alle genügend kleinen $\lambda > 0$ gilt:

$$\ll w, (\lambda - \mathcal{L}_n)^{-1} w \gg \geq \frac{\ll w, (\lambda - L_n)^{-1} w \gg}{Cn^6}$$

Beweis von Satz 4 : Im Beweis von Satz 3 (Formel (16)) hatten wir mit der Variationsformel (15) gezeigt, daß

$$\ll w, (\lambda - \mathcal{L})^{-1} w \gg = \sup_{f \in \mathcal{C}} \left\{ 2 \ll f, w \gg - \ll (f, \lambda - \mathcal{S}) f \gg - \ll \mathcal{A} f, (\lambda - \mathcal{S})^{-1} \mathcal{A} f \gg \right\}.$$

Auf dieselbe Weise erhält man:

$$\begin{aligned} & \ll w, (\lambda - L_n)^{-1} w \gg \\ = & \sup_{F \in C_n} \left\{ 2 \ll F, w \gg - \ll F, (\lambda - \Delta) F \gg - \ll AF, (\lambda - \Delta)^{-1} AF \gg \right\} \end{aligned}$$

Da $(\lambda - \Delta)^{-1}$ nichtnegativ ist, folgt für jedes ϵ mit $0 < \epsilon < 1$:

$$\begin{aligned} & \ll w, (\lambda - L_n)^{-1} w \gg \\ \leq & \sup_{F \in C_n} \left\{ 2 \ll F, w \gg - \ll F, (\lambda - \Delta) F \gg - \epsilon \ll AF, (\lambda - \Delta)^{-1} AF \gg \right\} \end{aligned} \tag{29}$$

Sei

$$\tilde{F} := TRF$$

Nach Lemma 4.1.4 gibt es ein $C > 1$, so daß:

$$\ll AF, (\lambda - \Delta)^{-1} AF \gg \geq \frac{1}{C} \ll A\tilde{F}, (\lambda - \Delta)^{-1} A\tilde{F} \gg - Cn^2 \ll F, (\lambda - \Delta) F \gg \tag{30}$$

für alle $F \in C_n$. Setzen wir in (29) nun $\epsilon := \frac{1}{2Cn^2}$, so erhalten wir zusammen mit (30):

$$\begin{aligned} & \ll w, (\lambda - L_n)^{-1} w \gg \\ \leq & \sup_{F \in C_n} \left\{ 2 \ll F, w \gg - \ll F, (\lambda - \Delta) F \gg - \frac{1}{2Cn^2} \ll AF, (\lambda - \Delta)^{-1} AF \gg \right\} \\ \leq & \sup_{F \in C_n} \left\{ 2 \ll F, w \gg - \frac{1}{2} \ll F, (\lambda - \Delta) F \gg - \frac{1}{2C^2 n^2} \ll A\tilde{F}, (\lambda - \Delta)^{-1} A\tilde{F} \gg \right\} \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.1.2 gilt für alle $F \in C_n$:

$$\ll F, (\lambda - \Delta)F \gg \geq \frac{1}{Cn^2} \ll \tilde{F}, (\lambda - \Delta)\tilde{F} \gg$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} & \ll w, (\lambda - L_n)^{-1} w \gg \\ \leq & \sup_{F \in C_n} \Big\{ 2 \ll F, w \gg - \frac{1}{2Cn^2} \ll \tilde{F}, (\lambda - \Delta)\tilde{F} \gg \\ & \qquad - \frac{1}{2C^2n^2} \ll A\tilde{F}, (\lambda - \Delta)^{-1} A\tilde{F} \gg \Big\} \end{aligned}$$

Wir schreiben ab jetzt f für RF. Damit gilt $\tilde{F} = TRF = Tf$. Ferner gilt $\ll f, w \gg = \ll F, w \gg$, denn alle $\tau_x w$ verschwinden außerhalb von $\mathcal{E}_1$, und in $\mathcal{E}_1$ stimmen F und RF überein. Da außerdem $\lambda - \Delta$ nichtnegativ ist, folgt:

$$\begin{aligned} & \ll w, (\lambda - L_n)^{-1} w \gg \\ \leq & \sup_{f \in \mathcal{C}_n} \Big\{ 2 \ll f, w \gg - \frac{1}{2Cn^2} \ll Tf, (\lambda - \Delta)Tf \gg \\ & \qquad - \frac{1}{2C^2n^2} \ll ATf, (\lambda - \Delta)^{-1} ATf \gg \Big\} \\ \leq & \sup_{f \in \mathcal{C}_n} \Big\{ 2 \ll f, w \gg - \frac{1}{2C^2n^2} \ll Tf, (\lambda - \Delta)Tf \gg \\ & \qquad - \frac{1}{4C^2n^4} \ll ATf, (\lambda - \Delta)^{-1} ATf \gg \Big\} \\ = & \sup_{f \in \mathcal{C}_n} \Big\{ 2 \ll f, w \gg - \frac{1}{4C^2n^2} \ll Tf, (\lambda - \Delta)Tf \gg \\ & - \Big[\frac{1}{4C^2n^2} \ll Tf, (\lambda - \Delta)Tf \gg + \frac{1}{4C^2n^4} \ll ATf, (\lambda - \Delta)^{-1} ATf \gg \Big] \Big\} \\ = & \sup_{f \in \mathcal{C}_n} \Big\{ 2 \ll f, w \gg - \frac{1}{4C^2n^2} \ll Tf, (\lambda - \Delta)Tf \gg \\ & - \frac{1}{4C^3n^6} C \left[n^4 \ll Tf, (\lambda - \Delta)Tf \gg + n^2 \ll ATf, (\lambda - \Delta)^{-1} ATf \gg \right] \Big\} \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.1.1 gilt:

$$\ll Tf, (\lambda - \Delta)Tf \gg \geq \ll f, (\lambda - \mathcal{S})f \gg,$$

und nach Lemma 4.1.3 gilt:

$$\begin{aligned} & C \left[n^4 \ll Tf, (\lambda - \Delta)Tf \gg + n^2 \ll ATf, (\lambda - \Delta)^{-1} ATf \gg \right] \\ \geq & \ll \mathcal{A}f, (\lambda - \mathcal{S})^{-1} \mathcal{A}f \gg . \end{aligned}$$

Es folgt:

$$
\begin{aligned}
& \ll w, (\lambda - L_n)^{-1} w \gg \\
\leq \;& \sup_{f \in \mathcal{C}_n} \left\{ 2 \ll f, w \gg - \frac{1}{4C^2 n^2} \ll f, (\lambda - \mathcal{S}) f \gg - \frac{1}{4C^3 n^6} \ll \mathcal{A} f, (\lambda - \mathcal{S})^{-1} \mathcal{A} f \gg \right\} \\
\leq \;& \sup_{f \in \mathcal{C}_n} \left\{ 2 \ll f, w \gg - \frac{1}{4C^3 n^6} \ll f, (\lambda - \mathcal{S}) f \gg - \frac{1}{4C^3 n^6} \ll \mathcal{A} f, (\lambda - \mathcal{S})^{-1} \mathcal{A} f \gg \right\}
\end{aligned}
$$

Wir ersetzen jetzt f durch $g := 4C^3 n^6 f$. Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
& \ll w, (\lambda - L_n)^{-1} w \gg \\
\leq \;& \sup_{g \in \mathcal{C}_n} \left\{ 2 \ll g, w \gg - \frac{1}{4C^3 n^6} \ll g, (\lambda - \mathcal{S}) g \gg - \frac{1}{4C^3 n^6} \ll \mathcal{A} g, (\lambda - \mathcal{S})^{-1} \mathcal{A} g \gg \right\} \\
= \;& 4C^3 n^6 \sup_{f \in \mathcal{C}_n} \left\{ 2 \ll f, w \gg - \ll f, (\lambda - \mathcal{S}) f \gg - \ll \mathcal{A} f, (\lambda - \mathcal{S})^{-1} \mathcal{A} f \gg \right\} \\
= \;& 4C^3 n^6 \ll w, (\lambda - \mathcal{L}_n)^{-1} w \gg,
\end{aligned}
$$

wobei der letzte Schritt wieder auf der Variationsformel (15) beruht.

Damit sind Satz 4 und somit auch Theorem 1 bewiesen. $\square$

Literatur

[1] E. B. Dynkin: Markov Processes, Volume 1, Springer-Verlag, 1965.

[2] C. Kipnis, C. Landim: Scaling Limits of Interacting Particle Systems, Springer-Verlag, 1999.

[3] C. Landim, S. Olla, H.-T. Yau: Some properties of the diffusion coefficient for asymmetric simple exclusion processes. The Annals of Probability **24**, 1779-1808 (1996).

[4] C. Landim, S. Olla, H.-T. Yau: First order correction for the hydrodynamic limit of asymmetric simple exclusion processes in dimension $d \geq 3$. Communications on Pure and Applied Mathematics **50**, 149-203 (1997).

[5] C. Landim, J. Quastel, M. Salmhofer, H.-T. Yau: Superdiffusivity of asymmetric exclusion process in dimensions one and two. Preprint, http://w3.impa.br/∼landim/pub.html (2002).

[6] C. Landim, H.-T. Yau: Fluctuation-dissipation equation of asymmetric simple exclusion processes. Probability Theory and Related Fields **108**, 321-356 (1997).

[7] F. Rezakhanlou: Hydrodynamic limit for attractive particle systems on $\mathbf{Z}^d$. Communications in Mathematical Physics **140**, 417-448 (1991).

[8] H. Spohn: Large Scale Dynamics of Interacting Particles, Springer-Verlag, 1991.